ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ
ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

- ☑ Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα - Ιδιόχωροι
- ☑ Πολυώνυμα Πινάκων
- ☑ Διαγωνοποίηση

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, $x \neq \mathcal{O}$, καλείται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) με ιδιοτιμή (eigenvalue) $\lambda \in \mathbb{F}$ για τον τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει ότι:

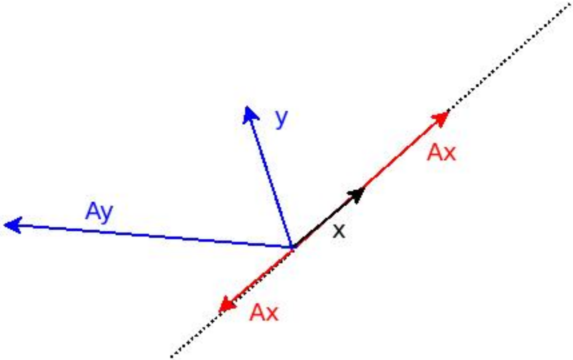
$$Ax = \lambda x.$$

Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές καλούνται **χαρακτηριστικά μεγέθη** ή **χαρακτηριστικά ποσά** του πίνακα.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Ο πίνακας A επιδρά ως μετασχηματισμός στα διανύσματα.



Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι εκείνα τα διανύσματα που δεν αλλάζουν φορέα παρά μόνο μήκος ή/και φορά. Η ιδιοτιμή καθορίζει πόσο θα αλλάξει το μήκος και η φορά (αν είναι αρνητική). Π.χ. Το y δεν είναι ιδιοδιάνυσμα, ενώ το x που παραμένει στον φορέα του, είναι.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και τα διανύσματα,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε:

$$A\,y = \lambda\,y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει η παραπάνω σχέση. Άρα το y δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Αντίθετα, για το x έχουμε:

$$A\,x = \lambda\,x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $\lambda = 3$. Άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\lambda = 3$. ■

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Υπολογισμός ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ - ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε το τετραγωνικό σύστημα:

   $$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = \mathcal{O} \Leftrightarrow (A - \lambda \mathcal{I})x = \mathcal{O}.$$

   Το σύστημα αυτό είναι τετραγωνικό $n \times n$, ομογενές, με παράμετρο λ.

2. Υπολογίζουμε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν,

   $$\det(A - \lambda \mathcal{I}) = 0,$$

   και αυτές οι τιμές του λ είναι οι ιδιοτιμές.

3. Για καθεμιά από τις παραπάνω τιμές του λ, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες λύσεις x που είναι τα ιδιοδιανύσματα. Προφανώς αυτές οι λύσεις είναι άπειρες για κάθε λ, δηλαδή θα έχουμε οικογένειες ιδιοδιανυσμάτων.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Θα υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ στα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$.

Αρχικά σχηματίζουμε το σύστημα,

$$(A - \lambda \mathcal{I})x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Αν ο πίνακας ορίζεται στο $\mathbb{R}$, τότε,

$$\lambda^2 + 1 > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αφού το σύστημα έχει μη-μηδενική ορίζουσα, θα έχει μοναδική λύση.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Αφού το σύστημα είναι και ομογενές, η μοναδική λύση θα είναι η τετριμμένη,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Όμως, εκ του ορισμού, τα ιδιοδιανύσματα δεν μπορεί να είναι μηδενικά, άρα ο πίνακας A δεν έχει ιδιοδιανύσματα στο $\mathbb{R}$.

Αντίθετα, στο σύνολο $\mathbb{C}$ έχουμε:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\mathrm{i}.$$

Για αυτά τα λ το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις, άρα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Ελέγχουμε καθεμιά ανεξάρτητα για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

(α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \mathrm{i}$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & \mathrm{i}\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow -\mathrm{i}\,x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \mathrm{i}\,x_1$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή η οικογένεια ιδιοδιανύσματων, για την ιδιοτιμή λ_1 είναι,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{i}\,x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

(β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & \mathrm{i}\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\mathrm{i}\,x_1$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή η οικογένεια ιδιοδιανύσματων, για την ιδιοτιμή λ_2 είναι,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\mathrm{i}\,x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}. \quad \blacksquare$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ορισμός

Ιδιοχώρος (eigenspace) μιας ιδιοτιμής λ_i ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται το σύνολο,

$$V(\lambda_i) = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F});\ (A - \lambda_i \mathcal{I})\, x = \mathcal{O}\}\,,$$

δηλαδή ο δ.χ. των ιδιοδιανύσματων της λ_i. Το σύνολο αυτό είναι μη-τετριμμένος υπόχωρος του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Επιπλέον, η διάστασή του είναι,

$$\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i \mathcal{I})$$

και καλείται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i. Για αυτή ισχύει ότι,

$$1 \leqslant \dim V(\lambda_i) \leqslant \nu_i,$$

όπου ν_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ορισμός

Ιδιοτιμή μιας απεικόνισης $f : V \to V$ ενός δ.χ. V με $\dim V = n$, καλείται μια τιμή $\lambda \in \mathbb{F}$ αν υπάρχει διάνυσμα $x \in V$, $x \neq \mathcal{O}$, τέτοιο ώστε, $f(x) = \lambda x$. Σε αυτή την περίπτωση το x καλείται **ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης** f. Αν A ο πίνακας αναπαράστασης της f, οπότε και $f(x) = A x$, οι ιδιοτιμές της f είναι οι ιδιοτιμές του A.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Προτάσεις

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, οι ιδιοτιμές του A, τότε,

$$\det A = \lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n\, b_0,$$

   όπου b_0 ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

2. Ο A αντιστρέφεται *ανν* δεν έχει μηδενικη ιδιοτιμή ή ισοδύναμα ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μη-μηδενικός.
3. Οι πίνακες A και $A^\top$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές.
4. Αν λ και x μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε τα λ^k και x είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον A^k, $k \in \mathbb{N}$, ενώ τα λ^{-1} και x είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον A^{-1}.
5. Αν $B = P^{-1}\, A\, P$ είναι όμοιος πίνακας με τον A και λ και x μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε τα λ και $P^{-1}\, x$ είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον B.
6. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα.
7. Αν A ερμιτιανός πίνακας, δηλαδή $A = A^*$, τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα, επιλύοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda) - 1\right] - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Για $\lambda_1 = 1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1\mathcal{I})\,x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{array}\right.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\,(1, 0, -1)^\top;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left((1, 0, -1)^\top \right).$$

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_1 = \left\{ (1, 0, -1)^\top \right\}, \qquad \dim V(\lambda_1) = 1 \leqslant \nu_1 = 1.$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, πρέπει να ισχύει ότι, $\dim V(\lambda_1) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I})$.
Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (\text{γραμμοπράξεις}) \cdots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (\text{κλιμακωτή μορφή})$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα $\mathrm{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = 2$ και από το θεώρημα έχουμε,

$$\dim V(\lambda_1) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = 3 - 2 = 1,$$

που επαληθεύει αυτό που βρήκαμε παραπάνω.

(β) Για $\lambda_2 = -1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_2 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2\,x_3 \end{array} \right.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_2 = -1$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ -2\,x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1, -2, 1)^\top;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left((1, -2, 1)^\top \right).$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_2) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_2 = \left\{(1, -2, 1)^\top\right\}, \qquad \dim V(\lambda_2) = 1 \leqslant v_2 = 1.$$

Να κάνετε επαλήθευση του θεωρήματος, $\dim V(\lambda_2) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_2 \mathcal{I})$, όπως παραπάνω.

(γ) Για $\lambda_3 = 2$ έχουμε:

$$(A - \lambda_3 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_3 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & = & x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_3 = 2$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_3) = \left\{ x\,(1,1,1)^\top ;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left((1,1,1)^\top \right).$$

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_3) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_3 = \left\{ (1,1,1)^\top \right\}, \qquad \dim V(\lambda_3) = 1 \leqslant v_3 = 1.$$

Να κάνετε επαλήθευση του θεωρήματος, $\dim V(\lambda_3) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_3\,\mathcal{I})$, όπως παραπάνω. ■

Πολυώνυμα πινάκων

Ορισμός

Πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται ένας πίνακας της μορφής,

$$\rho(A) = a_k\, A^k + a_{k-1}\, A^{k-1} + \cdots + a_1\, A + a_0\, \mathcal{I}, \quad a_i \in \mathbb{F}, \forall\, i.$$

Ο πίνακας A είναι **ρίζα** του πολυωνύμου αν $\rho(A) = \mathcal{O}$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει ότι $\chi_A(A) = \mathcal{O}$, δηλαδή κάθε τετραγωνικός πίνακας αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.

Ορισμός

Ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(A)$ ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται το πολυώνυμο του A με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με 1.
2. $m_A(A) = \mathcal{O}$
3. Το $m_A(A)$ είναι το πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό από όλα τα πολυώνυμα που πληρούν τις ιδιότητες (1) και (2).

Πολυώνυμα πινάκων

Προτάσεις

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ είναι μοναδικό.
2. Αν $\chi_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε,
$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)\,\pi(\lambda),$$
όπου $\pi(\lambda)$ κάποιο πολυώνυμο. Δηλαδή, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο διαιρείται ακριβώς με το ελάχιστο πολυώνυμο.
3. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ έχει ακριβώς τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$. Οι ρίζες αυτές είναι οι ιδιοτιμές του A.
4. Αν $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s}$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι,
$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$
με $1 \leqslant k_i \leqslant \nu_i$, $i = 1, \ldots, s$. Προφανώς αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε $m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

Πολυώνυμα πινάκων

Υπολογισμός ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Για να βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}.$$
2. Ελέγχουμε ένα προς ένα όλα τα πολυώνυμα,
$$m(A) = (A - \lambda_1 \mathcal{I})^{k_1} (A - \lambda_2 \mathcal{I})^{k_2} \cdots (A - \lambda_i \mathcal{I})^{k_i},$$
με $1 \leqslant k_i \leqslant \nu_i$, ξεκινώντας από τον μικρότερο βαθμό προς τον μεγαλύτερο.
3. Το πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό για το οποίο ισχύει η ιδιότητα,
$$m(A) = \mathcal{O},$$
είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A (και είναι μοναδικό).

Πολυώνυμα πινάκων

- Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\,(\lambda-2)^2.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι ένα εκ των ακόλουθων πολυωνύμων:

$$m_1(\lambda) = (\lambda-1)\,(\lambda-2), \qquad m_2(\lambda) = (\lambda-1)^2\,(\lambda-2),$$

$$m_3(\lambda) = (\lambda-1)\,(\lambda-2)^2, \qquad m_4(\lambda) = (\lambda-1)^2\,(\lambda-2)^2.$$

Ξεκινούμε να τα ελέγχουμε με την παραπάνω σειρά (από τον χαμηλότερο προς τον μεγαλύτερο βαθμό). Έχουμε:

$$m_1(A) = (A-\mathcal{I})\,(A-2\,\mathcal{I}) = \cdots (\text{πράξεις πινάκων}) \cdots = \mathcal{O}.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $m_A(\lambda) = (\lambda-1)\,(\lambda-2)$. ■

Διαγωνοποίηση

Ορισμός

Διαγωνοποιήσιμος καλείται ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε,

$$D = P^{-1} A P,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας. Με άλλα λόγια, ένας πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Πρόταση

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται *ανν* έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επιπλέον, ο διαγώνιος πίνακας $D = P^{-1} A P$ θα έχει στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A και ο πίνακας P θα έχει σε στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που συνιστούν βάσεις των ιδιοχώρων.

Διαγωνοποίηση

- Θα ελέγξουμε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Αρχικά, υπολογίζουμε με τον γνωστό τρόπο τις ιδιοτιμές του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathcal{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 3)\,(\lambda - 2).$$

Αφου ο πίνακας έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές, θα έχει υποχρεωτικά και 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και άρα διαγωνοποιείται σύμφωνα με την γνωστή πρόταση.

(α) Για την $\lambda_1 = 3$ υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο ο ιδιοχώρος,

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\ (1, 3/2)^\top\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_1 = \left\{ (1, 3/2)^\top \right\}$.

Διαγωνοποίηση

(β) Για την $\lambda_2 = 2$ υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο ο ιδιοχώρος,

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1,1)^\top ;\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_2 = \left\{ (1,1)^\top \right\}$.

Σύμφωνα με την πρόταση, ο διαγώνιος πίνακας και ο πίνακας ομοιότητας θα δίνονται ως εξής:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, εύκολα επαληθεύεται ότι ο P είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

και,

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Διαγωνοποίηση

Προτάσεις

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται (το αντίστροφο δεν ισχύει).
2. Αν ο A διαγωνοποιείται και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, τότε η k-δύναμή του δίνεται ως:

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

   όπου P ο πίνακας ομοιότητας.
3. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται *ανν* το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων,

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k),$$

   όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.
4. Το ίχνος του A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$, δίνεται ως,

$$\mathrm{tr}(A) = (\nu_1\, \lambda_1)(\nu_2\, \lambda_2) \cdots (\nu_k\, \lambda_k).$$

Διαγωνοποίηση

- Θα υπολογίσουμε την δύναμη A^5 για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Αρχικά, υπολογίζουμε με τον γνωστό τρόπο τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathcal{I} - A) = \cdots = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 5),$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $\lambda_2 = 5$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1). Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι υπολογίζονται κατά τα γνωστά:

(α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - 2\,x_2.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Διαγωνοποίηση

Συνεπώς ο ιδιοχώρος της λ_1 είναι ο ακόλουθος:

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\,(1,0,-1)^\top + y\,(0,1,-2)^\top;\ x,y \in \mathbb{R} \right\},$$

με βάση την ακόλουθη (να αποδείξετε ότι είναι βάση),

$$B_1 = \left\{ (1,0,-1)^\top, (0,1,-2)^\top \right\}.$$

και διάσταση $\dim V(\lambda_1) = 2$.

(β) Όμοια, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda_2 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς ο ιδιοχώρος της λ_2 είναι ο ακόλουθος:

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1,1,1)^\top;\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_2 = \left\{ (1,1,1)^\top \right\}$ και διάσταση $\dim V(\lambda_2) = 1$.

Διαγωνοποίηση

Αφού ο πίνακας έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποιείται με,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

και εύκολα υπολογίζουμε (με οποιαδήποτε μέθοδο θέλουμε) ότι,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, κατά τα γνωστά, θα έχουμε:

$$A^5 = P\,D^5\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 5^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 782 & 1562 & 781 \\ 781 & 1563 & 781 \\ 781 & 1562 & 782 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$