ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- ☑ Ορισμοί - ιδιότητες
- ☑ Επαυξημένος Πίνακας και Κλιμακωτή μορφή
- ☑ Μέθοδος Απαλοιφής Gauss
- ☑ Μέθοδος Cramer
- ☑ Βαθμός Πίνακα και Διερεύνηση Συστήματος

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Ένα **γραμμικό σύστημα** (linear system) m εξισώσεων με n αγνώστους έχει την γενική μορφή:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

όπου x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι άγνωστοι (μεταβλητές) που θέλουμε να προσδιορίσουμε, a_{ij} είναι γνωστοί συντελεστές των αγνώστων και b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, είναι σταθεροί όροι, όλοι από το σύνολο $\mathbb{F}$. Το σύστημα μπορεί να γραφτεί σε μορφή πινάκων,

$$A\,X = b,$$

όπου,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Λύση του γραμμικού συστήματος της Σχέσης (1) καλούμε κάθε n-άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που επαληθεύει όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Ορισμός

Συμβιβαστό καλείται ένα γραμμικό σύστημα αν έχει τουλάχιστον μία λύση. Αν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε καλείται **αόριστο**. Αν δεν έχει καμία λύση καλείται **ασυμβίβαστο** ή **αδύνατο**.

Ορισμός

Τετραγωνικό καλείται ένα γραμμικό σύστημα αν έχει ίδιο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων. Δηλαδή, αν στην γενική μορφή της Σχέσης (1) έχουμε $m = n$.

Ορισμός

Ομογενές καλείται ένα γραμμικό σύστημα αν όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με μηδέν, δηλαδή,

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0.$$

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Επαυξημένος πίνακας (augmented matrix) του γραμμικού συστήματος της Σχέσης (1) καλείται ο πίνακας,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Έστω το σύστημα,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4\,x_2 & + & x_3 & = & -6 \\ -2\,x_1 & + & 3\,x_2 & - & 3\,x_3 & = & -5 \end{array} \right.$$

Ο επαυξημένος πίνακάς του είναι ο ακόλουθος:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -3 & -5 \end{array} \right)$$

Γραμμικά Συστήματα

Ιδιότητες Συστημάτων

Για το γραμμικό σύστημα της Σχέσης (1) ισχύουν τα ακόλουθα:

1. (**Μετασχηματισμός Τύπου I**)
   Αν μια εξίσωση του συστήματος πολλαπλασιαστεί με κάποιον αριθμό $k \neq 0$ (και στα δύο μέλη), τότε μια λύση του αρχικού συστήματος θα επαληθεύει και το νέο.
2. (**Μετασχηματισμός Τύπου II**)
   Αν σε μια εξίσωση του συστήματος προσθέσουμε μια άλλη εξίσωσή του πολλαπλασιασμένη με κάποιον αριθμό $k \neq 0$, τότε μια λύση του αρχικού συστήματος θα επαληθεύει και το νέο.
3. (**Μετασχηματισμός Τύπου III**)
   Αν εναλλάξουμε δύο εξισώσεις του συστήματος, δεν μεταβάλλονται οι λύσεις του.

Δηλαδή, αν στον επαυξημένο πίνακα ενός γραμμικού συστήματος κάνουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, τότε προκύπτουν νέοι, γραμμοϊσοδύναμοι επαυξημένοι πίνακες που αντιστοιχούν σε ισοδύναμα συστήματα με ιδίες λύσεις με το αρχικό.

Προσπαθήστε να αποδείξετε τις παραπάνω ιδιότητες.

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Ηγετικό στοιχείο μιας γραμμής ενός πίνακα καλείται το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της γραμμής. Αν μια γραμμή αποτελείται μόνο από μηδενικά, τότε καλείται **μηδενική γραμμή**.

Έστω ο πίνακας,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το ηγετικό στοιχείο της 1ης γραμμής είναι το 1.
Το ηγετικό στοιχείο της 2ης γραμμής είναι το -5.
Το ηγετικό στοιχείο της 3ης γραμμής είναι το -2.

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Κλιμακωτός καλείται ένας πίνακας αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής (εκτός της 1ης γραμμής) βρίσκεται δεξιότερα από το ηγετικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.
2. Όλες οι μη-μηδενικές γραμμές του πίνακα βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές.

Ορισμός

Ανηγμένος Κλιμακωτός καλείται ένας κλιμακωτός πίνακας αν ισχύουν επιπλέον οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής είναι ίσο με 1.
2. Κάθε ηγετικό στοιχείο είναι το μοναδικό μη-μηδενικό στοιχείο στην στήλη που ανήκει.

Γραμμικά Συστήματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ ανηγμένος κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ όχι κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ κλιμακωτός, όχι ανηγμένος

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ανηγμένος κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ όχι κλιμακωτός

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ανηγμένος κλιμακωτός

Γραμμικά Συστήματα

Πρόταση

Κάθε πίνακας από το σύνολο $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $m \times n$ κλιμακωτό πίνακα. Επίσης, κάθε γραμμικό σύστημα της μορφής της Σχέσης (1) είναι ισοδύναμο με ένα άλλο του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός ή ανηγμένος κλιμακωτός.

Γραμμικά Συστήματα

Μέθοδος ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS

Αν μας δοθεί ένα δύσκολο γραμμικό σύστημα προς επίλυση, τότε:

1. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος ώστε να καταλήξουμε σε έναν γραμμοϊσοδύναμο (ανηγμένο) κλιμακωτό πίνακα.
2. Ο κλιμακωτός πίνακας αντιστοιχεί σε ένα πολύ απλούστερο σύστημα που έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό.
3. Επιλύουμε το απλό σύστημα.

Οι λύσεις του αρχικού (δύσκολου) συστήματος ταυτίζονται με αυτές του (ευκολότερου) συστήματος που επιλύσαμε.

Γραμμικά Συστήματα

- Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ με την Μέθοδο Απαλοιφής Gauss το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2\,x_2 & + & 12\,x_3 & + & 11\,x_4 & = & -20 \\ 2\,x_1 & + & 8\,x_2 & + & 16\,x_3 & & & = & 12 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 3\,x_4 & = & -1 \end{array}\right.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left(\begin{array}{cccr|r} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Θα προσπαθήσουμε να το φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή. Παρατηρούμε ότι το ηγετικό στοιχείο της 1ης γραμμής είναι δεξιότερα από των υπολοίπων. Άρα, για να καταφέρουμε να φέρουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή θα πρέπει να αλλάξουμε την θέση αυτής της γραμμής με κάποιας άλλης (Μετασχηματισμός Τύπου ΙΙΙ). Προφανώς μας εξυπηρετεί περισσότερο η ανταλλαγή με την 3η γραμμή που έχει ηγετικό στοιχείο το 1:

$$\left(\begin{array}{cccr|r} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right)$$

Γραμμικά Συστήματα

Ακολούθως μηδενίζουμε το στοιχείο 2 κάτω από το ηγετικό στοιχείο της 1ης γραμμής, με κατάλληλο Μετασχηματισμό Τύπου ΙΙ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \\ \hookleftarrow \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right)$$

Έτσι, η 1η στήλη του γραμμοϊσοδύναμου επαυξημένου πίνακα έχει την κατάλληλη δομή (ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα).
Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι η 2η και 3η γραμμή έχουν πολλά κοινά στοιχεία και θα μπορούσαμε να μηδενίσουμε κάποια από αυτά με κατάλληλο Μετασχηματισμό Τύπου ΙΙ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right)$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε μονάδες τα ηγετικά στοιχεία 2ης και 3ης γραμμής:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\div 2) \\ (\div 17) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Γραμμικά Συστήματα

Για να γίνει ανηγμένος κλιμακωτός ο πίνακας, θα πρέπει να μηδενιστούν και όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία στις στήλες των ηγετικών στοιχείων της 2ης και 3ης γραμμής:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 12 & -22 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ & \\ (3) & (-12) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 16\,x_3 & & = 2 \\ & & x_2 & + & 6\,x_3 & & = 1 \\ & & & & & x_4 & = -2 \end{array}\right.$$

το οποίο έχει προφανείς (άπειρες) λύσεις:

$$x_1 = 2 + 16\,x_3, \quad x_2 = 1 - 6\,x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_4 = -2.$$

Αυτές είναι και οι (άπειρες) λύσεις του αρχικού συστήματος (είναι αόριστο). ■

Γραμμικά Συστήματα

Μέθοδος CRAMER

Η μέθοδος Cramer εφαρμόζεται σε τετραγωνικά συστήματα της μορφής,

$$A\,x = b,$$

όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$ και εφόσον ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $\det A \neq 0$. Τότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από την σχέση:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την i-στήλη του πίνακα A με την στήλη b των σταθερών όρων του συστήματος.

Γραμμικά Συστήματα

- Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ με την Μέθοδο Cramer το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & 2\,x_3 & = & -2 \\ -3\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Το σύστημα είναι τετραγωνικό 3×3. Εξετάζουμε αν ο πίνακας A αντιστρέφεται:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} (-2) & (3) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 10 & -4 \end{vmatrix}$$

Παίρνουμε το Ανάπτυγμα Laplace ως προς την 1η στήλη κι έχουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$

Άρα ο πίνακας A αντιστρέφεται κι επομένως εφαρμόζεται η Μέθοδος Cramer.

Γραμμικά Συστήματα

Υπολογίζουμε τις απαιτούμενες ποσότητες:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -48$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 60$$

(να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί των οριζουσών)

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-48}{-20} = \frac{24}{10}, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-16}{-20} = \frac{4}{5}, \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{60}{-20} = -3. \quad \blacksquare$$

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Βαθμός ή **τάξη** (rank) ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του γραμμοϊσοδύναμου (ανηγμένου) κλιμακωτού πίνακα που προκύπτει από τον A με γραμμοπράξεις και συμβολίζεται $\mathrm{rank}(A)$.

Πρόταση

Αν $(A|b)$ είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος και K (ανηγμένος) κλιμακωτός που προκύπτει από αυτόν με γραμμοπράξεις, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό ανν,

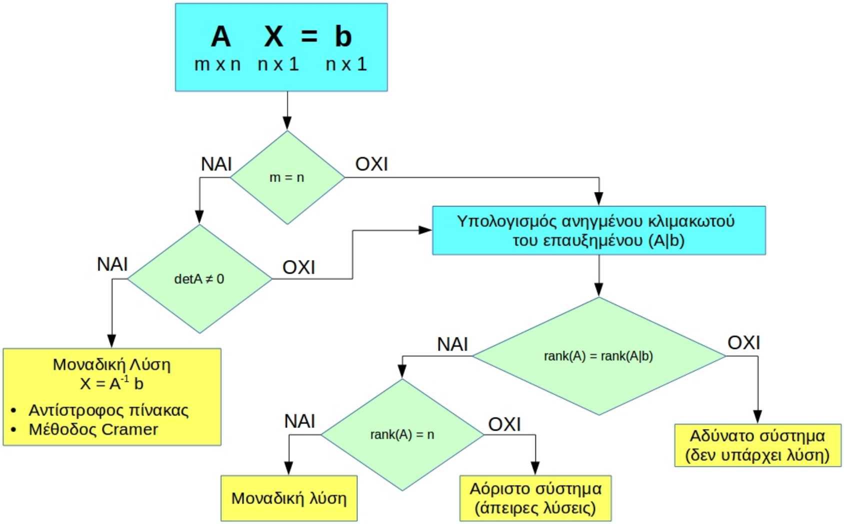
$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|b)$$

ή, ισοδύναμα, αν ο K δεν περιέχει γραμμή της μορφής,

$$(0\ 0\ \cdots\ 0 \mid \alpha), \qquad \alpha \neq 0.$$

Γραμμικά Συστήματα

Διάγραμμα Διερεύνησης Συστήματος



Γραμμικά Συστήματα

- Να διερευνηθεί και επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3\,x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & \alpha \\ 4\,x_1 & + & x_2 & - & 2\,x_3 & = & \alpha \end{array}\right.$$

Το σύστημα έχει $m = 4$ εξισώσεις και $n = 3$ αγνώστους $(m \neq n)$. Σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα διερεύνησης, θα πρέπει να φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και να υπολογίσουμε τον βαθμό του.

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & \alpha \\ 4 & 1 & -2 & \alpha \end{array}\right) \quad (-2) \quad (-3) \quad (-4) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & \alpha - 9 \\ 0 & -3 & -6 & \alpha - 12 \end{array}\right) \quad (-1) \quad (-1) \quad \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & \alpha - 5 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha - 8 \end{array}\right) \quad \sim$$

Γραμμικά Συστήματα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \alpha-5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha-8 \end{array}\right) \quad (3) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & -10 & 3\,\alpha-19 \\ 0 & 0 & -5 & \alpha-8 \end{array}\right) \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & -10 & 3\,\alpha-19 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,\alpha+\frac{3}{2} \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (-1) \\ \div(-10) \end{array} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -\alpha+8 \\ 0 & 1 & -3 & \alpha-5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10}\,\alpha+\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,\alpha+\frac{3}{2} \end{array}\right) \quad (3) \quad (-4) \quad \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\,\alpha+\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10}\,\alpha+\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10}\,\alpha+\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,\alpha+\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Ο πίνακας που προέκυψε είναι ανηγμένος κλιμακωτός. Όπως βλέπουμε, ο βαθμός του A (αριστερό τμήμα του επαυξημένου) είναι,

$$\mathrm{rank}(A) = 3,$$

διότι έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές.

Γραμμικά Συστήματα

Όμως, ο βαθμός του επαυξημένου $(A|b)$ εξαρτάται από την τιμή που θα πάρει το στοιχείο $-\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{3}{2}$ στο κάτω δεξιό μέρος του πίνακα.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $-\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$, τότε ο επαυξημένος στην κλιμακωτή μορφή του γίνεται:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}\,3 + \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10}\,3 + \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10}\,3 + \frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,3 + \frac{3}{2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|b) = 3 = n$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 1.$$

(2) Αν $-\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{3}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 3$, τότε η τελευταία γραμμή του κλιμακωτού επαυξημένου δεν είναι μηδενική, επομένως,

$$\mathrm{rank}(A|b) = 4 \neq \mathrm{rank}(A) = 3,$$

οπότε το σύστημα είναι αδύνατο (δεν έχει λύσεις). ■

Γραμμικά Συστήματα

- Να διερευνηθεί και επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ το ακόλουθο σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (\mu+1)\,x & + & (\mu-1)\,y & = & \mu \\ \mu\,x & + & (\mu+1)\,y & = & \mu-1 \end{array} \right. \qquad \mu \in \mathbb{R}.$$

Το σύστημα είναι τετραγωνικό 2×2, οπότε αρχικά ελέγχουμε την ορίζουσά του:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \mu+1 & \mu-1 \\ \mu & \mu+1 \end{vmatrix} = (\mu+1)^2 - \mu\,(\mu-1) = 3\,\mu+1$$

Συνεπώς,

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow 3\,\mu+1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{3}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $\mu \neq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (δείτε το διάγραμμα).
Την υπολογίζουμε με την μέθοδο Cramer:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mu & \mu-1 \\ \mu-1 & \mu+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 3\,\mu - 1, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \mu+1 & \mu \\ \mu & \mu-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -1.$$

Γραμμικά Συστήματα

Άρα η μοναδική λύση είναι:

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{3\,\mu - 1}{3\,\mu + 1}, \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -\frac{1}{3\,\mu + 1}.$$

(2) Αν $\mu = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \det(A) = 0$, τότε οι πίνακες του συστήματος γίνονται:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

οπότε ο επαυξημένος δίνεται ως εξής:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \begin{array}{c} (3) \\ (-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2) \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Από την τελευταία γραμμή προκύπτει ότι $\mathrm{rank}(A|b) \neq \mathrm{rank}(A)$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο. ■

Γραμμικά Συστήματα

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέφεται ανν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο πίνακα.

Μέθοδος Εύρεσης Αντίστροφου Πίνακα

Αν μας δοθεί ένας τετραγωνικός πίνακας A τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} ως εξής:

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα $(A|\mathcal{I})$ όπου δίπλα στον A τοποθετούμε τον αντίστοιχο μοναδιαίο πίνακα.
2. Κάνουμε γραμμοπράξεις με στόχο να καταλήξουμε σε μια μορφή $(\mathcal{I}|B)$, δηλαδή να εμφανιστεί ο μοναδιαίος πίνακας αριστερά.
3. Ο πίνακας B που θα έχει προκύψει στο δεξί μέλος είναι ο $B = A^{-1}$.

Αν είναι αδύνατο να φέρουμε τον πίνακα στην μορφή $(\mathcal{I}|B)$, τότε ο αντίστροφος δεν υπάρχει.

Γραμμικά Συστήματα

- Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Σύμφωνα με την μεθοδολογία, σχηματίζουμε τον πίνακα $(A|\mathcal{I})$ και με γραμμοπράξεις προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μορφή $(\mathcal{I}|B)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{2}) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-\frac{3}{2}) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \text{άρα} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ \blacksquare$$

Να επαληθεύσετε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι ο αντίστροφος του A.