ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2025-26
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

Περιεχόμενα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Διάνυσμα

- **Διάνυσμα**: Δομή που περιέχει μια διατεταγμένη λίστα αριθμών πεπερασμένου μήκους/διάστασης.
- Οι αριθμοί ενός διανύσματος καλούνται στοιχεία (ή συντελεστές) του.
  - **διατεταγμένη**: η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα στοιχεία έχει σημασία.
  - **διάσταση**: ο αριθμός (πλήθος) των στοιχείων που περιέχει.
  - **πεπερασμένου**: δεν μπορούμε να έχουμε άπειρους αριθμούς. Η διάσταση θα πρέπει να είναι πεπερασμένη (π.χ. 2, 7, 99, 1024, 10000, ...).

Σε περίπτωση διάστασης «1», πρόκειται για απλό πραγματικό αριθμό (βαθμωτό μέγεθος). Παράδειγμα: ένα διάνυσμα με δύο στοιχεία αναπαριστά π.χ. τις συντεταγμένες ενός σημείου στο 2Δ-επίπεδο.

Αναπαράσταση διανύσματος

- Φυσική: Βέλος στο χώρο.
- Πληροφορική: Λίστα αριθμών, π.χ. $(0, 1, 3.5)$.
- Έχει σημασία η σειρά εμφάνισης: $(0, 3.5, 1) \neq (0, 1, 3.5)$.
- Μαθηματικά: $\mathbf{v}$ ή $\vec{v}$.

Διάνυσμα στήλη και γραμμή

- Διάνυσμα στήλη: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$, εναλλακτικά: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)$.
- Διάνυσμα γραμμή: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_N)$.
- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Διανυσματικές πράξεις Σημείο κλειδί της γραμμικής άλγεβρας:

- Μπορούμε να τα προσθέσουμε, να τα πολλαπλασιάσουμε με έναν αριθμό καθώς και να τα συνδυάσουμε μεταξύ τους.

Πρόσθεση διανυσμάτων

- Πρόσθεση: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$.
- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό c

- Πολλαπλασιασμός: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $c \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \end{pmatrix}$.
- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

- Συνδυάζουμε τις δύο προηγούμενες πράξεις (πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό) για να δημιουργήσουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{γραμμικός συνδυασμός:} c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{w}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

$$c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \cdot w_1 \\ d \cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 + d \cdot w_1 \\ c \cdot v_2 + d \cdot w_2 \end{pmatrix}$$

όπου $c, d \in \mathbb{R}$.

- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$2 \cdot \mathbf{v} + (-3) \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Διανύσματα

- Ένα διάνυσμα με δύο στοιχεία (2 διαστάσεων) αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο επίπεδο. Τι συμβαίνει στις 3 διαστάσεις;

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων στις τρεις διαστάσεις (3Δ)

- Συνδυάζουμε τις δύο προηγούμενες πράξεις (πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό) για να δημιουργήσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}.$$

- Για ένα 3Δ διάνυσμα $\mathbf{u}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι πολλαπλάσια του $\mathbf{u}$, δηλαδή $c \cdot \mathbf{u}$ (π.χ. $-3 \cdot \mathbf{u}$, $1.2 \cdot \mathbf{u}$, $0 \cdot \mathbf{u}$).
- Για δύο 3Δ διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$ (π.χ. $1 \cdot \mathbf{u} + 3 \cdot \mathbf{v}$).
- Για τρία 3Δ διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$ (π.χ. $2 \cdot \mathbf{u} - 3 \cdot \mathbf{v} + 0.5 \cdot \mathbf{w}$).
- Από έναν συνδυασμό σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς (c, d, e)?

Διανύσματα

Ερωτήσεις:

- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{u}$;
- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{w}$;
- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$;

Απαντήσεις:

- Μια γραμμή η οποία περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$.
- Ένα επίπεδο που περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$.
- Τον 3Δ χώρο (έναν κύβο).

Τυπική Κατάσταση: Γραμμή, Επίπεδο, Χώρος. Όχι όμως πάντα. Τι συμβαίνει όταν $\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$; (Το 3ο διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων 2).

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, υπολογίζεται ως:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$
- Ισχύει: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (η σειρά εμφάνισης των διανυσμάτων δεν παίζει ρόλο).

Παράδειγμα

- Αν $\mathbf{u} = (1, 2)$ και $\mathbf{v} = (3, 1)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$
- Αν $\mathbf{u} = (4, 2)$ και $\mathbf{v} = (-1, 2)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$
- Αν $\mathbf{u} = (1, 0)$ και $\mathbf{v} = (0, 1)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$
- Διανύσματα με εσωτερικό γινόμενο «0» είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Γενίκευση στις N διαστάσεις

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_N \cdot v_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \cdot v_i$$

Μήκος Διανύσματος

- Το μήκος ή μέτρο ενός διανύσματος είναι η τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού του γινομένου:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2}$$

- Παράδειγμα: Αν $\mathbf{u} = (1, 2)$, το μήκος του $\mathbf{u}$ είναι:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

- Αν $\mathbf{u} = (a, b)$, το μήκος του $\mathbf{u}$ είναι:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$|\mathbf{u}|^2 = a^2 + b^2$$

Γωνία διανυσμάτων - Μοναδιαίο διάνυσμα

- Διάνυσμα μήκους «1»: $|\mathbf{u}| = 1$.
- Από ένα διάνυσμα **v** μπορούμε να κατασκευάσουμε το μοναδιαίο διάνυσμά του ως εξής: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ (διαιρούμε κάθε στοιχείο του διανύσματος με το μήκος του διανύσματος).
- Τα διανύσματα **u** και **v** είναι συγγραμμικά.

Παράδειγμα:

- Τα τυπικά μοναδιαία διανύσματα συμβολίζονται με τα γράμματα **i** και **j**.
- Στις δύο διαστάσεις έχουμε: $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$.
- Το μοναδιαίο διάνυσμα **u** που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x είναι το:

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta).$$

- Ισχύει: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Κάθετα διανύσματα

- Εάν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, **u** και **v**, είναι μηδέν (0) τότε τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Γιατί; Θυμηθείτε ότι:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta.$$

- Εάν η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων **u** και **v** είναι θ, τότε:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos\theta.$$

- Επομένως, αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, τότε $\cos\theta = 0$, δηλαδή η γωνία είναι 90°.

Συμπέρασμα:

- Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ έχει θετικό πρόσημο, τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μικρότερη των 90°.
- Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ έχει αρνητικό πρόσημο, τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μεγαλύτερη των 90°.
- Ισχύει: $\cos\theta > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\cos\theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Διατύπωση

Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

- Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα **u** και **v** είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη της Ανισότητας Cauchy-Schwarz

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = \|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 \geq 0$
- Αναπτύσσουμε το $f(t)$:

$$f(t) = \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2\|\mathbf{v}\|^2$$

- Επειδή $f(t) \geq 0$ για όλα τα t, η διακρίνουσα είναι μη θετική:

$$\Delta = [2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle]^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \leq 0$$

- Απλοποιούμε για να προκύψει η ανισότητα.

Ανισότητα Τριγώνου

Διατύπωση

Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

- Γεωμετρική ερμηνεία: Το άθροισμα των μηκών δύο πλευρών τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μήκος της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη της Ανισότητας Τριγώνου

- Ξεκινάμε με το τετράγωνο της νόρμας:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$$

- Εφαρμόζουμε την Cauchy-Schwarz:

$$2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \leq 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

- Επομένως:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

- Λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέλη προκύπτει η ανισότητα.

Ανισότητα Minkowski

Διατύπωση

Για $p \geq 1$ και διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_p \leq \|\mathbf{u}\|_p + \|\mathbf{v}\|_p$$

- Γενίκευση της ανισότητας τριγώνου για τις νόρμες L^p.

Ανισότητα Hölder

Διατύπωση

Για $p, q > 1$ με $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q$$

- Η ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι ειδική περίπτωση όταν $p = q = 2$.

Εφαρμογές των Ανισοτήτων Διανυσμάτων

- Προβλήματα βελτιστοποίησης
- Ανάλυση δεδομένων και μηχανική μάθηση
- Επεξεργασία σήματος
- Κβαντική μηχανική

Παράδειγμα 1: Επαλήθευση της Cauchy-Schwarz

- Έστω $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{v} = (4, -5, 6)$
- Υπολογίστε $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, και $\|\mathbf{v}\|$
- Επαληθεύστε ότι $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$

Λύση του Παραδείγματος 1

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
- $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77}$
- $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \sqrt{14 \times 77} \approx 32.86$
- $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |12| = 12$
- Επειδή $12 \leq 32.86$, η ανισότητα ισχύει.

Τι είναι ένα tensor (τανυστής);

- Ένα tensor είναι μια πολυδιάστατη γενίκευση διανυσμάτων και μητρώων.
- Μπορεί να αναπαραστήσει μεγέθη όπως διανύσματα, πίνακες, και περισσότερο πολύπλοκες μαθηματικές δομές.
- Ένα tensor βαθμού 0 είναι ένας αριθμός (ή βαθμωτό).
- Ένα tensor βαθμού 1 είναι ένα διάνυσμα.
- Ένα tensor βαθμού 2 είναι ένας πίνακας.

Tensors Βαθμού 0, 1, 2

- Tensor Βαθμού 0 (scalar):
$$T^0 = 5$$
- Tensor Βαθμού 1 (Διάνυσμα):
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Tensor Βαθμού 2 (Πίνακας):
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

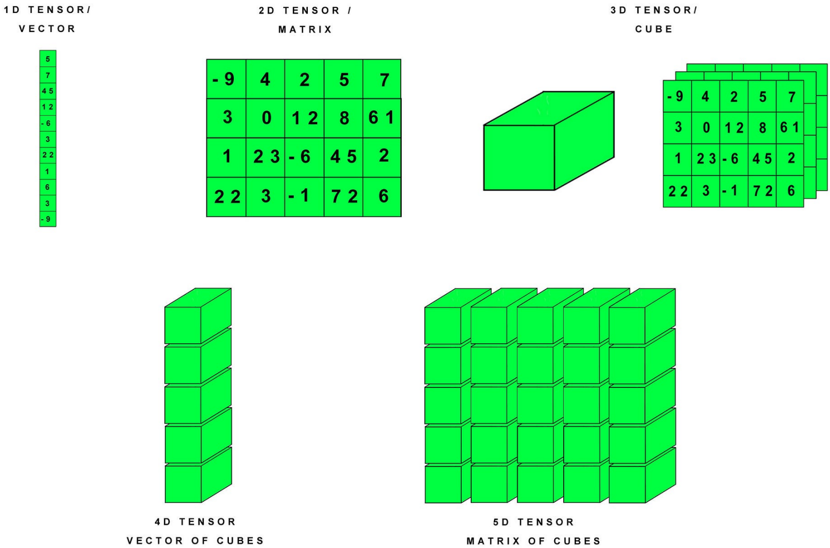
Tensor Υψηλότερου Βαθμού

- Τα tensors μπορούν να έχουν περισσότερες διαστάσεις και να αναπαρασταθούν ως πολυδιάστατοι πίνακες.
- Ένα tensor βαθμού 3 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κύβος δεδομένων:

$$T^3 = \{T_{ijk}\} \quad \text{με } i, j, k \text{ να είναι οι δείκτες}$$

- Tensors υψηλότερων βαθμών χρησιμοποιούνται συχνά στη φυσική (π.χ. στο Γενικό Σχετικιστικό Πλαίσιο).

Tensor visualization



Πράξεις με Tensors

- **Addition and Subtraction**: Tensors of the same rank can be added or subtracted element-wise.
- **Tensor Product**: The product of two tensors A_{ij} and B_{kl} results in a new tensor $C_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$.
- **Contraction**: Reducing the rank of a tensor by summing over one or more pairs of indices.

$$C = T_{ij} A^j \tag{1}$$

Tensors στη Φυσική

- Τα tensors είναι απαραίτητα στην περιγραφή φυσικών φαινομένων, όπως η Θεωρία της Σχετικότητας.
- Στη Γενική Σχετικότητα του Einstein, το tensor καμπυλότητας Riemann είναι ένα tensor βαθμού 4 που περιγράφει την καμπυλότητα του χωροχρόνου.

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

- **Continuum Mechanics**: Stress and strain in materials are described using tensors.
- **Computer Vision and Deep Learning**: Tensors are used to represent multi-dimensional data.

Python Code Example

Below is an example in Python using PyTorch for basic tensor operations.

```
import torch

# Creating Tensors
# A scalar (rank-0 tensor)
scalar = torch.tensor(5)
print(f'Scalar tensor: {scalar}')

# A vector (rank-1 tensor)
vector = torch.tensor([1, 2, 3])
print(f'Vector tensor: {vector}')

# A matrix (rank-2 tensor)
matrix = torch.tensor([[1, 2], [3, 4]])
print(f'Matrix tensor:\n{matrix}')

\# A rank-3 tensor
tensor_3d = torch.tensor([[[1, 2], [3, 4]], [[5, 6], [7, 8]]])
print(f'Rank-3 tensor:\n{tensor_3d}')
```

Tensor operations

```
# Element-wise addition
tensor_sum = vector + torch.tensor([3, 2, 1])
print(f"Element-wise addition result: {tensor_sum}")

# Matrix multiplication
mat1 = torch.tensor([[1, 2], [3, 4]])
mat2 = torch.tensor([[5, 6], [7, 8]])
mat_mul = torch.matmul(mat1, mat2)
print(f"Matrix multiplication result:\n{mat_mul}")

# Tensor reshaping
reshaped_tensor = tensor_3d.view(2, 4)
print(f"Reshaped tensor:\n{reshaped_tensor}")

# Automatic differentiation
x = torch.tensor(3.0, requires_grad=True)
y = x**2
y.backward()
print(f"The derivative of y = x^2 at x = 3 is: {x.grad}")
```

Explanation of Key Concepts

- **Creating Tensors**: Tensors are multi-dimensional arrays in PyTorch. We create scalar, vector, matrix, and rank-3 tensors in the example.
- **Tensor Operations**: We perform element-wise addition and matrix multiplication.
- **Reshaping Tensors**: The `view` function reshapes tensors.
- **Automatic Differentiation**: PyTorch supports automatic differentiation using the `requires_grad=True` option, and the gradient is computed using the `backward()` method.