# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

**Κωνσταντίνος Σκιάνης**
*Επίκουρος Καθηγητής*

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

# ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

- ☑ Ανάπτυγμα Laplace
- ☑ Ορίζουσες και Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί
- ☑ Ύπαρξη και Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα
- ☑ Μέθοδος Προσαρτημένου Πίνακα

# Ορίζουσες

## Ορισμός

**Ορίζουσα** (determinant) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται μια απεικόνιση,

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F},$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν $r_i$ είναι η $i$-γραμμή του πίνακα $A$ και $p$, $q$, δύο πίνακες - γραμμές με $r_i = \lambda\, p + \mu\, q$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, τότε:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ \lambda\, p + \mu\, q \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ p \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ q \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

2. Αν $r_i = r_j$ για κάποιο $i \neq j$, τότε $\det A = 0$.
3. $\det \mathcal{I}_n = 1$.

Εναλλακτικός συμβολισμός: $\det A$, $\det(A)$, $|A|$

# Ορίζουσες

**ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ LAPLACE**

Το ανάπτυγμα Laplace αποτελεί έναν απλό, αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της ορίζουσας πινάκων:

Για έναν $2 \times 2$ πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, η ορίζουσα υπολογίζεται από την απλή σχέση:

$$\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Για έναν $3 \times 3$ πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ο υπολογισμός της ορίζουσας ανάγεται σε υπολογισμό $2 \times 2$ υπο-οριζουσών.

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά αναθέτουμε ένα πρόσημο σε κάθε στοιχείο του πίνακα, ξεκινώντας με το $+$ στην θέση (1,1) και πηγαίνοντας εναλλάξ έτσι ώστε δύο γειτονικά στοιχεία οριζόντια ή κάθετα να έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα:

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{a_{11}} & \overset{(-)}{a_{12}} & \overset{(+)}{a_{13}} \\ \overset{(-)}{a_{21}} & \overset{(+)}{a_{22}} & \overset{(-)}{a_{23}} \\ \overset{(+)}{a_{31}} & \overset{(-)}{a_{32}} & \overset{(+)}{a_{33}} \end{vmatrix}$$

# Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-) & (+) & (-) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ (+) & (-) & (+) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Στην συνέχεια, επιλέγεται μια γραμμή ή στήλη του πίνακα. Η ορίζουσα θα δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της επιλεχθείσας γραμμής ή στήλης, επί τα αντίστοιχα πρόσημα, επί την αντίστοιχη υπο-ορίζουσα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον πίνακα την γραμμή και την στήλη στην οποία ανήκει το αντίστοιχο στοιχείο.

Για παράδειγμα, αν επιλεγεί η 1η γραμμή, τότε:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι η αντίστοιχη υπο-ορίζουσα για το στοιχείο $a_{ij}$ είναι αυτή που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $i$-γραμμή και $j$-στήλη του πίνακα.

# Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} \textcolor{red}{(+)} & \textcolor{red}{(-)} & \textcolor{red}{(+)} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \textcolor{red}{(-)} & \textcolor{red}{(+)} & \textcolor{red}{(-)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \textcolor{red}{(+)} & \textcolor{red}{(-)} & \textcolor{red}{(+)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Αντίστοιχα, αν επιλεγεί η 2η γραμμή, τότε:

$$\det A = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 3η γραμμή, τότε:

$$\det A = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

# Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-) & (+) & (-) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ (+) & (-) & (+) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 1η στήλη, τότε:

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 2η στήλη, τότε:

$$\det A = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 3η στήλη, τότε:

$$\det A = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ακολούθως, υπολογίζονται οι $2 \times 2$ ορίζουσες και προκύπτει η τιμή της $\det A$. Το ίδιο γενικεύεται σε πίνακες διάστασης $n \times n$, κάνοντας διαδοχικά αναπτύγματα στις ορίζουσες μέχρι να κατέβουμε σε διάσταση $2 \times 2$.

# Ορίζουσες

## Ορισμός

Το **ανάπτυγμα Laplace** ως προς την $i$-γραμμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, δίνεται από την σχέση:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{ij},$$

όπου $A_{ij}$ είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακας που προκύπτει από τον $A$ αν αφαιρέσουμε την $i$-γραμμή και την $j$-στήλη.

## Προσοχή!

Η ορίζουσα υπολογίζεται για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και η τιμή της **είναι μοναδική**. Συνεπώς, όποια γραμμή ή στήλη και να επιλέξετε στο ανάπτυγμα Laplace, θα πρέπει να λάβετε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα!
Προφανώς μας συμφέρει να επιλέγουμε πάντα την γραμμή ή στήλη με τα **περισσότερα μηδενικά** ώστε να υπολογίζουμε λιγότερες υπο-ορίζουσες.

# Ορίζουσες

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα:

Αρχικά αναθέτουμε πρόσημα: $\det A = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{-2} & \overset{(-)}{3} & \overset{(+)}{-1} \\ \overset{(-)}{4} & \overset{(+)}{-1} & \overset{(-)}{0} \\ \overset{(+)}{1} & \overset{(-)}{5} & \overset{(+)}{0} \end{vmatrix}$.

Στην συνέχεια επιλέγουμε γραμμή ή στήλη ως προς την οποία θα αναπτύξουμε. Προφανώς είναι προτιμότερο να αναπτύξουμε ως προς την 3η στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)\det A_{13} - 0\det A_{23} + 0\det A_{33} \\ &= (-1)\det A_{13} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\,(4\times 5 - (-1)\times 1) \\ &= -21 \end{aligned}$$

# Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ -2 & 3 & -1 \\ (-) & (+) & (-) \\ 4 & -1 & 0 \\ (+) & (-) & (+) \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Αν είχαμε επιλέξει την 1η γραμμή:

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)\det A_{11} - 3\det A_{12} + (-1)\det A_{13} \\ &= (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(0-0) - 3(0-0) + (-1)(20+1) \\ &= -21 \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα ως προς τις υπόλοιπες γραμμές και στήλες.

# Ορίζουσες

## Ιδιότητες Ορίζουσας

1. Η ορίζουσα τριγωνικού ή διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του: $\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$.
2. Αν ένας πίνακας έχει δύο όμοιες γραμμές, $r_i = r_j$, ή ανάλογες μεταξύ τους, $r_i = k\, r_j$, ή μια μηδενική γραμμή, τότε έχει $\det A = 0$. Όμοια και για τις στήλες.
3. $\det(\lambda\, A) = \lambda^n \det A$
4. **Μετασχηματισμός Τύπου I**: Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα $A$ με έναν αριθμό $\lambda$, τότε ο νέος πίνακας $A'$ που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = \lambda \det A.$$
5. **Μετασχηματισμός Τύπου II**: Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα $A$, μια άλλη γραμμή του πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό, τότε ο νέος πίνακας $A'$ που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = \det A.$$
6. **Μετασχηματισμός Τύπου III**: Αν εναλλάξουμε την θέση δύο γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα $A$, ο νέος πίνακας $A'$ που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = -\det A.$$

# Ορίζουσες

- Με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Καταρχήν παρατηρούμε ότι στην 1η γραμμή και στήλη έχουμε παντού το στοιχείο $a$. Άρα, μπορούμε να σχηματίσουμε μηδενικά αφαιρώντας την 1η γραμμή από όλες τις υπόλοιπες. Αυτό είναι Μετασχηματισμός Τύπου ΙΙ και δεν αλλάζει την ορίζουσα:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

# Ορίζουσες

Παίρνουμε ανάπτυγμα Laplace ως προς την 1η στήλη:

$$\det A = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$$

Παίρνουμε πάλι ανάπτυγμα Laplace ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{aligned} \det A &= a\,(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \\ &= a\,(b-a) \left[(c-b)\,(d-b) - (c-b)^2\right] \\ &= a\,(b-a)\,(c-b)\,[(d-b)-(c-b)] \\ &= a\,(b-a)\,(c-b)\,(d-c) \end{aligned}$$

# Ορίζουσες

## Προτάσεις

Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $\det A^\top = \det A, \qquad \det \overline{A} = \overline{\det A}, \qquad \det A^* = \overline{\det A}$
2. $\det(A\,B) = \det A \det B$
3. $\det\left(A^k\right) = (\det A)^k$

## Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

# Αντίστροφος Πίνακας

**Σημασία του αντίστροφου πίνακα**

Η ορίζουσα ενός πίνακα μας δίνει πληροφορίες σχετικά με την αντιστρεψιμότητά του. Όμως γιατί είναι σημαντική η αντιστροφή?

Στις περισσότερες εφαρμογές του φυσικού κόσμου όπου απαιτούνται υπολογισμοί, εμφανίζονται γραμμικά συστήματα των οποίων αναζητούμε την λύση.

Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από ένα πλήθος γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους. Η γενική μορφή τους είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

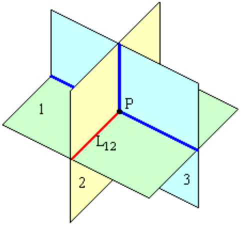
όπου $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι άγνωστοι, $a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, είναι γνωστοί συντελεστές των αγνώστων και $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι σταθεροί όροι.

Η επίλυση του συστήματος είναι η διδαδικασία εύρεσης κατάλληλων τιμών των αγνώστων $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις του συστήματος, ταυτόχρονα.

Σε μεγάλα συστήματα, δεν είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση με απλή αντικατάσταση.

# Αντίστροφος Πίνακας

Για παράδειγμα, η εύρεση της τομής των 3 επιπέδων που ορίζονται από τις σχέσεις,




$$\begin{aligned} \text{επίπεδο } 1: &\quad 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ \text{επίπεδο } 2: &\quad x - y - z + 1 = 0 \\ \text{επίπεδο } 3: &\quad -x + 2y - z + 2 = 0 \end{aligned}$$

και τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο, ανάγεται στην επίλυση του συστήματος,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -2 \end{array}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα σε μορφή πινάκων ως εξής,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b} \iff AX = b$$

# Αντίστροφος Πίνακας

Επόμένως, αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $A^{-1}$, έχουμε,

$$\begin{aligned} AX = b &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}b \\ &\iff \left(A^{-1}A\right) X = A^{-1}b \\ &\iff \mathcal{I}X = A^{-1}b \\ &\iff X = A^{-1}b \end{aligned}$$

Δηλαδή, η λύση $X$ του συστήματος δίνεται από το γινόμενο των πινάκων $A^{-1}$ και $b$.

Επομένως, η επίλυση του γραμμικού συστήματος ανάγεται στην εύρεση του αντίστροφου του πίνακα $A$ των συντελεστών των αγνώστων. ■

# Αντίστροφος Πίνακας

## Ορισμός

**Αλγεβρικά συμπληρώματα** ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλούνται οι ποσότητες,

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου $A_{ij}$ είναι ο υποπίνακας που προκύπτει από τον $A$ αν αφαιρεθεί η $i$-γραμμή και η $j$-στήλη του.

# Αντίστροφος Πίνακας

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det A_{11} = -7, \qquad c_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = -7$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det A_{12} = 3, \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -3$$

Ομοιοτρόπως λαμβάνουμε,

$$c_{13} = 2,\ c_{21} = -2,\ c_{22} = -2,\ c_{23} = 0,\ c_{31} = -3,\ c_{32} = -3,\ c_{33} = 2. \quad \blacksquare$$

# Αντίστροφος Πίνακας

## Ορισμός

**Προσαρτημένος** (adjugate) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται ο πίνακας $\mathrm{adj}(A) \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος στην $(i, j)$-θέση του περιέχει το αλγεβρικό συμπλήρωμα $c_{ji}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{adj}(A) = C^\top,$$

όπου,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του $A$.

# Αντίστροφος Πίνακας

- Για τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

του οποίου έχουμε ήδη υπολογίσει τα αλγεβρικά συμπληρώματα, έχουμε,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

και άρα ο προσαρτημένος του είναι,

$$\mathrm{adj}(A) = C^\top = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

# Αντίστροφος Πίνακας

**Πρόταση**

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν,

$$\det A \neq 0,$$

και τότε ο αντίστροφος πίνακας δίνεται από την σχέση,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj}(A),$$

όπου $\mathrm{adj}(A)$ ο προσαρτημένος πίνακας του $A$.

# Αντίστροφος Πίνακας

- Για τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας αντιστρέφεται. Επίσης βρήκαμε τον προσαρτημένο του,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, ο αντίστροφος του $A$ είναι ο πίνακας,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 3/4 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$