ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

Ας γνωριστούμε...

Τετάρτη 11.00-13.00
Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής
Γραφείο Α8 (1ος όροφος)
https://y3nk0.github.io

Με τι θα ασχοληθούμε...

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα?

- ✓ Ένας από τους σημαντικότερους κλάδους των Μαθηματικών με αμέτρητες εφαρμογές.
- ✓ Μελετά τους γραμμικούς διανυσματικούς χώρους και τις γραμμικές απεικονίσεις.
- ✓ Επιλύει σημαντικά προβλήματα όπως η εύρεση λύσεων γραμμικών συστημάτων.
- ✓ Αξιοποιεί θεμελιώδη εργαλεία όπως οι πίνακες και οι ιδιότητές τους.

Που αναμένεται να την χρησιμοποιήσω?

- ✓ Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (Αριθμητική Ανάλυση, Βελτιστοποίηση)
- ✓ Γραφικά / Αλγόριθμοι / Επεξεργασία Σημάτων
- ✓ Τεχνητή Νοημοσύνη / Μηχανική Μάθηση
- ✓ "*One reason why people who learn more mathematics earn more is because doing maths makes you smarter and more productive*"
  How to Get Smarter, The Economist

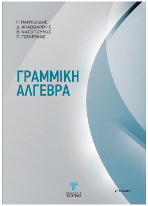
Θεμελιώδεις Έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας

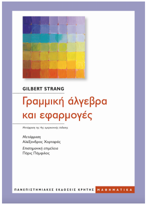
- **Τα διανύσματα** είναι τα βασικά στοιχεία των διανυσματικών χώρων.
- **Οι πίνακες** χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν γραμμικούς μετασχηματισμούς που δρουν πάνω στα διανύσματα σε αυτούς τους χώρους.
- **Οι ορίζουσες των πινάκων** μας δείχνουν αν αυτοί οι μετασχηματισμοί είναι αντιστρέψιμοι (δηλαδή αν τα γραμμικά συστήματα έχουν μοναδικές λύσεις).
- **Τα γραμμικά συστήματα** μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας πράξεις πινάκων, και οι λύσεις σχηματίζουν διανυσματικούς χώρους.
- **Οι διανυσματικοί χώροι** παρέχουν το πλαίσιο για την κατανόηση των λύσεων των γραμμικών συστημάτων και της συμπεριφοράς των μετασχηματισμών.
- **Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα** προσφέρουν πληροφορίες για τη φύση αυτών των μετασχηματισμών, περιγράφοντας τις κατευθύνσεις και τα μεγέθη των διαστολών ή συρρικνώσεων.

Με τι θα ασχοληθούμε...

Ποιές πηγές να συμβουλευτώ?

- ✓ Τα προτεινόμενα συγγράματα:





- ✓ Τις παρούσες διαφάνειες και το σχετικό υλικό στο E-Course
- ✓ Το σχετικό υλικό στην Κεντρική Βιβλιοθήκη του Π.Ι.
- ✓ Τους διδάσκοντες (αφού εξαντλήσουμε τα υπόλοιπα)

Πως πρέπει να δουλέψουμε...

Το μυστικό της επιτυχίας: 3 απλά βήματα

Παρακολούθηση

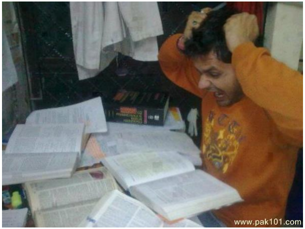
Συμμετοχή

Επανάληψη

Πως πρέπει να δουλέψουμε...

Τι να αποφύγουμε?

Ανεπιτυχής παρακολούθηση



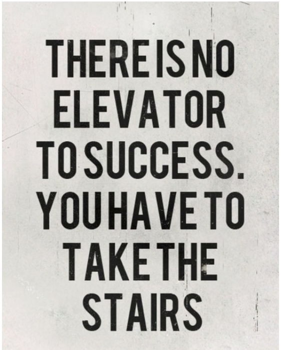
Διάβασμα τελευταίας στιγμής

Classroom socializing

Πως θα αξιολογηθούμε...

- ✓ Εξέταση Ιανουαρίου
- ✓ Εξέταση Σεπτεμβρίου
- ✓ Δικαίωμα επανεξέτασης 1 φορά εντός του ακαδημαϊκού έτους για βελτίωση βαθμολογίας.

Έχουμε συνέχεια στο μυαλό μας ότι...



ΠΙΝΑΚΕΣ

- ☑ Εισαγωγή - Βασικοί Ορισμοί
- ☑ Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί
- ☑ Πράξεις Πινάκων
- ☑ Αντίστροφος Πίνακας

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Πίνακας (matrix) A με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{F}$ καλείται μια δομή διάταξης $m \times n$ το πλήθος στοιχείων του $\mathbb{F}$ σε ένα ορθογώνιο σχήμα m γραμμών και n στηλών:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbb{F} \equiv \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{F},\ \forall i, j, \qquad m, n \geqslant 1$$

Ένας τέτοιος πίνακας λέμε ότι είναι διάστασης $((m \text{ επί } n))$.

Εισαγωγή στους Πίνακες

- Μερικά παραδείγματα:

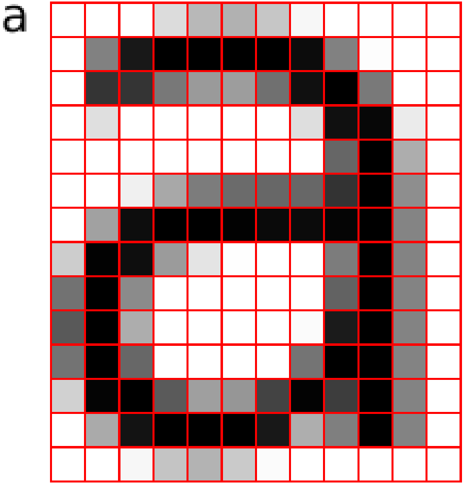
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -6 & 12 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 1 & 0 \\ -2 & 21 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & 21 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1.465 & \pi & \sqrt{12} & \log 12 \\ 5 + 3.21\, i & -6 & \frac{1}{13} & 2 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

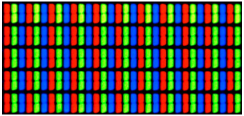
Ψηφιακή αναπαράσταση εικόνας (grayscale)

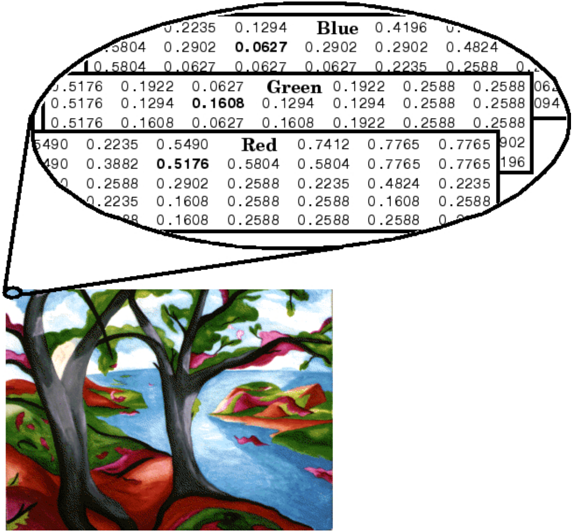


1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.6	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0
1.0	0.2	0.2	0.5	0.6	0.6	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.0	0.0	0.9	1.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.0	0.5	1.0
1.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.0	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.6	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.1	0.0	0.6	0.7	0.7	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	0.7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.9	0.8	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.8	0.8	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Εισαγωγή στους Πίνακες

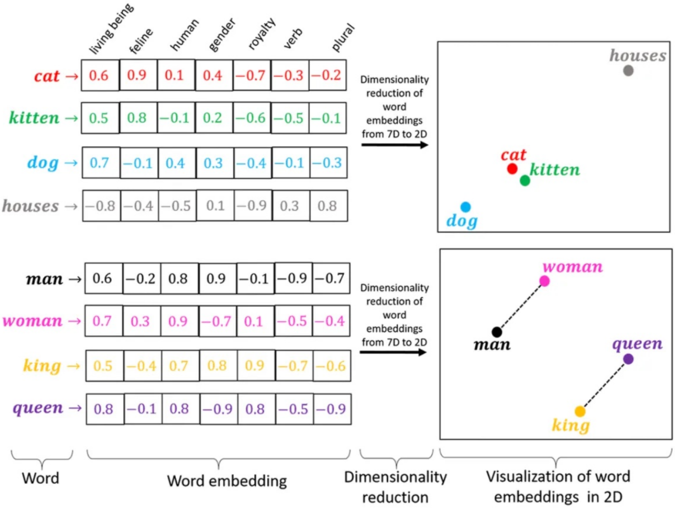
Ψηφιακή αναπαράσταση εικόνας (RGB)





Εισαγωγή στους Πίνακες

Αναπαράσταση λέξεων (word embeddings)



Εισαγωγή στους Πίνακες

- Οι πίνακες συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία λατινικά γράμματα $(A, B, C, \ldots)$.

- Τα στοιχεία τους συμβολίζονται με τα αντίστοιχα μικρά γράμματα και υποδείκτες που δηλώνουν την θέση του στοιχείου στον πίνακα (π.χ. a_{ij} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα A).

- Εναλλακτικά της Σχέσης (1), ένας πίνακας A μπορεί να δοθεί και χωρίς να τον γράψουμε στην πλήρη μορφή του, ως εξής:

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

- Η διάσταση $m \times n$ ενός πίνακα μπορεί να δηλωθεί ως υποδείκτης στο όνομα του πίνακα,
$$A_{m\times n},$$
αν δεν προκύπτει σαφώς με άλλο τρόπο. Αν $m = n$ τότε μπορούμε απλά να γράφουμε A_n αντί για $A_{n\times n}$.

- Το σύνολο των πινάκων διάστασης $m \times n$ με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ συμβολίζεται,
$$M_{m\times n}(\mathbb{F}).$$
Αν $m = n$ τότε μπορούμε απλά να γράφουμε $M_n(\mathbb{F})$.

Εισαγωγή στους Πίνακες

- Έστω ο ακόλουθος 4×4 πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 11 & -21 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Ας εντοπίσουμε τις γραμμές και τις στήλες του...

Εισαγωγή στους Πίνακες

$$A = \begin{array}{c c c}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 11 & -21 & 0 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} & \begin{array}{l} 1\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} \\ 2\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} \\ 3\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} \\ 4\eta\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\eta} \end{array}\end{array}$$

$$A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 11 & -21 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1\eta & 2\eta & 3\eta & 4\eta \\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta & \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta & \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta & \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta \end{array}\end{array}$$

Μερικά από τα στοιχεία του:

$$a_{23} = 12, \quad a_{44} = 9, \quad a_{31} = 0, \quad a_{14} = 1, \quad a_{21} = -7, \quad a_{42} = -21 \quad \blacksquare$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Πίνακας - γραμμή (row matrix) καλείται ένας πίνακας που αποτελείται από μια μόνο γραμμή.

$$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Πίνακας - στήλη (column matrix) καλείται ένας πίνακας που αποτελείται από μια μόνο στήλη.

$$B_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Υποπίνακας (submatrix) διάστασης $p \times q$ ενός πίνακα $A_{m\times n}$ με $1 \leqslant p \leqslant m$ και $1 \leqslant q \leqslant n$ καλείται κάθε block διάστασης $p \times q$ του A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 11 & -21 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 11 & -21 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

υποπίνακας $B_{3\times 2}$ υποπίνακας $C_{2\times 2}$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Σύνθετος (composite) καλείται ένας πίνακας που αποτελείται από άλλους πίνακες.

$$D = \left(\begin{array}{rr|rrr} 3 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ -7 & 5 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -2 \\ \hline 11 & -21 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right)$$

Ο πινακας D είναι σύνθετος και αποτελείται από τους πίνακες D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}

Προσοχή! Οι δείκτες των πινάκων εδώ δείχνουν την θέση τους στον D και όχι την διάστασή τους.

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Μηδενικός πίνακας (zero matrix) καλείται ένας πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

$$\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}_{1\times 4} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

Ορισμός

Τετραγωνικός πίνακας (square matrix) καλείται ένας πίνακας με ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών, δηλαδή διάστασης $n \times n$ με $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Κύρια διαγώνιος (main diagonal) ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ καλείται η διαγώνιος που αποτελείται από τα στοιχεία a_{ii} με $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \color{red}{a_{44}} \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Διαγώνιος πίνακας (diagonal matrix) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ όταν,

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j,$$

δηλαδή όταν <u>όλα</u> τα στοιχεία του που βρίσκονται εκτός της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με μηδέν. Ένα τέτοιον πίνακα τον συμβολίζουμε και ως,

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(-5, 2, 0, 4\right).$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Μοναδιαίος ή **ταυτοτικός πίνακας** (identity matrix) καλείται ένας διαγώνιος πίνακας με <u>όλα</u> τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να είναι ίσα με 1,

$$\mathcal{I}_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1).$$

$$\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \mathcal{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Άνω τριγωνικός πίνακας (upper triangular matrix) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ όταν,

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i > j,$$

δηλαδή <u>όλα</u> τα στοιχεία <u>κάτω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 0.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Κάτω τριγωνικός πίνακας (lower triangular matrix) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ όταν,

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i < j,$$

δηλαδή <u>όλα</u> τα στοιχεία <u>πάνω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 0.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ ονομάζεται το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(A) = -2 + 0 + 4 = 2$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Ανάστροφος (transpose) ενός $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ καλείται ο $n \times m$ πίνακας που έχει ως στήλες τις γραμμές του A και ως γραμμές τις στήλες του A (με την ίδια σειρά εμφάνισης),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

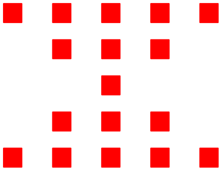
$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

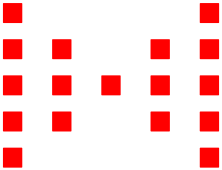
$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 10 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

- Γραφική αναπαράσταση αναστροφής πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Συμμετρικός (symmetric) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ αν,

$$A = A^T \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Αντισυμμετρικός (antisymmetric) καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ αν,

$$A = -A^T \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 \\ -8 & 0 & -1 \\ -9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

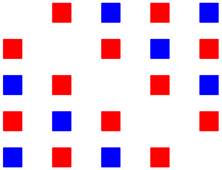
Παρατηρήστε ότι στους αντισυμμετρικούς πίνακες τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι όλα ίσα με 0 λόγω της ιδιότητας,

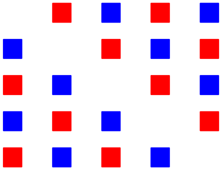
$$a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0, \quad \forall i.$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

- Γραφική αναπαράσταση συμμετρικού και αντισυμμετρικού πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$





Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Συζυγής (conjugate) ενός μιγαδικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, καλείται ο πίνακας,

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}}) \ \in \ M_{m\times n}(\mathbb{C}),$$

που έχει ως στοιχεία τα συζυγή των αντίστοιχων στοιχείων του πίνακα A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2i \\ 2-i & 3 & 5-i \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2i \\ 2+i & 3 & 5+i \end{pmatrix}$$

Αν $z = x + yi$ ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ο συζυγής του είναι ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = x - yi$.

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Ανάστροφος συζυγής (conjugate transpose) ενός μιγαδικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, καλείται ο $n \times m$ πίνακας,

$$A^* = \overline{A^T}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2i \\ 2-i & 3 & 5-i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 7 & 3 \\ -2i & 5+i \end{pmatrix}$$

Ορισμός

Ερμιτιανός (Hermitian) καλείται ένας μιγαδικός πίνακας $A = (a_{ij})$ αν,

$$A = A^* \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad \forall i, j.$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Ίσοι καλούνται δύο πίνακες ίδιας διάστασης $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, αν,

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = B$$

Εισαγωγή στους Πίνακες

Ορισμός

Αντίθετος πίνακας ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ καλείται ο πίνακας,

$$-A = (-a_{ij}), \quad \forall i, j.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Ορισμός

Στοιχειώδεις μετασχηματισμούς πινάκων καλούμε κάποιες συγκεκριμένες διαδικασίες που μεταβάλλουν έναν πίνακα με συγκεκριμένο τρόπο, ώστε να διατηρούνται αναλλοίωτα ή να αλλάζουν με προκαθορισμένο τρόπο κάποια σημαντικά μεγέθη του (π.χ. η ορίζουσα).

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, συμβολίζουμε:

$$r_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \quad i - \text{οστή γραμμή του } A$$

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad j - \text{οστή στήλη του } A$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός ΤΥΠΟΥ I

Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής του πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ με ένα στοιχείο $k \in \mathbb{F}$, $k \neq 0$.

$$r_i \to k\, r_i$$

Ο πολλαπλασιασμός γίνεται σε κάθε ένα στοιχείο της i-γραμμής του πίνακα A ανεξάρτητα.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to (-1)\, r_2} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ (-1) \times 10 & (-1) \times 0 & (-1) \times (-1) \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to 2\, r_3} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 2 \times 0 & 2 \times (-3) & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2}\, r_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times (-2) & \frac{1}{2} \times 8 & \frac{1}{2} \times 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Εναλλακτικός Συμβολισμός

$$r_2 \to (-1)\, r_2 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ -10 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \to 2\, r_3 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} (2) \sim \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to \frac{1}{2}\, r_1 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός ΤΥΠΟΥ II

Πρόσθεση της j-γραμμής του πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ πολλαπλασιασμένης με κάποιο $k \in \mathbb{F}$, στην i-γραμμή του πίνακα A.

$$r_i \to r_i + k\, r_j$$

Η j-γραμμή του πίνακα A δεν μεταβάλλεται. Η πρόσθεση γίνεται ανάμεσα στα στοιχεία της i-γραμμής και στα αντίστοιχα στοιχεία της j-γραμμής πολλαπλασιασμένα με το k.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3\, r_2} \begin{pmatrix} -2 + (3 \times 10) & 8 + (3 \times 0) & 0 + (3 \times (-1)) \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 8 & -3 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 - 10 & -3 - 0 & 4 - (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ -10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Εναλλακτικός Συμβολισμός

$$r_1 \to r_1 + 3\,r_2 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \; (3) \; \sim \begin{pmatrix} 28 & 8 & -3 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \to r_3 - r_2 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \; (-1) \; \sim \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ -10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Μετασχηματισμός ΤΥΠΟΥ III

Εναλλαγή της i-γραμμής με την j-γραμμή του πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

$$r_i \leftrightarrow r_j$$

Οι δύο γραμμές απλά εναλλάσουν τις θέσεις τους χωρίς να αλλάζουν τα στοιχεία τους.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 10 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Εναλλακτικός Συμβολισμός

$$r_2 \leftrightarrow r_3 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_3 : \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 10 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 10 & 0 & -1 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Ορισμός

Γραμμοϊσοδύναμοι καλούνται δύο πίνακες $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ όταν ο ένας προκύπτει από τον άλλο μέσω εφαρμογής πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών μετασχηματισμών στις γραμμές του.

Πράξεις Πινάκων

Πρόσθεση Πινάκων

Η **πρόσθεση πινάκων** ορίζεται μεταξύ δύο πινάκων ίδιας διάστασης, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, και το αποτέλεσμα είναι ένας νέος πίνακας ίδιας διάστασης, $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, που συμβολίζεται,

$$C = A + B,$$

και τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Πράξεις Πινάκων

- Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι δύο πίνακες έχουν ίδια διάσταση 2×3, άρα η πρόσθεση $A + B$ ορίζεται και το άθροισμά τους είναι:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5+(-4) & 2+3 & 7+1 \\ -1+1 & 3+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Αφαίρεση Πινάκων

Η **αφαίρεση πινάκων** ορίζεται μεταξύ δύο πινάκων ίδιας διάστασης, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, και το αποτέλεσμα είναι ένας νέος πίνακας ίδιας διάστασης, $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, που συμβολίζεται,

$$C = A - B = A + (-B),$$

και τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής,

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij}), \quad \forall i, j.$$

Πράξεις Πινάκων

- Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & x \\ -1 & 3 \\ 7 & 4+2i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ y & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Οι δύο πίνακες έχουν ίδια διάσταση 3×2, άρα η αφαίρεση $A - B$ ορίζεται και το αποτέλεσμα είναι:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 5 & x \\ -1 & 3 \\ 7 & 4+2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ y & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5-(-4) & x-3 \\ -1-y & 3-0 \\ 7-1 & 4+2i-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & x-3 \\ -1-y & 3 \\ 6 & 4+i \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Αριθμό

Ο **πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό** ορίζεται μεταξύ οποιουδήποτε πινάκα $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και ενός αριθμού $k \in \mathbb{F}$. Το αποτέλεσμα είναι ένας νέος πίνακας ίδιας διάστασης, $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, που συμβολίζεται,

$$C = k\,A,$$

και τα στοιχεία του ορίζονται ως εξής,

$$c_{ij} = k\,a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Πράξεις Πινάκων

- Έστω ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και $k = 2$, τότε:

$$C = k\,A = 2 \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times (-4) & 2 \times 3 & 2 \times (-1) & 2 \times 5 \\ 2 \times 5 & 2 \times (-1) & 2 \times 0 & 2 \times (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 6 & -2 & 10 \\ 10 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Πίνακα

Ο **πολλαπλασιασμός πινάκων** ορίζεται μεταξύ δύο πινάκων $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ls})$, διαστάσεων $m \times n$ και $n \times k$, αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα είναι ένας νέος πίνακας $AB = C = (c_{ij}) \in M_{m\times k}(\mathbb{F})$, με στοιχεία,

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad \forall i, j.$$

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ m & \times & \boxed{n \qquad n} & \times & k \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & m \times k & & \\ & & AB & & \end{array}$$

Για να γίνεται ο πολλαπλασιασμός πρέπει οι ((εσωτερικές)) διαστάσεις των πινάκων να συμφωνούν και η διάσταση του αποτελέσματος δίνεται από τις ((εξωτερικές)) διαστάσεις.

Πράξεις Πινάκων

- Έστω οι πίνακες:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ο πολλαπλασιασμός $A\,B$ γίνεται και θα δώσει αποτέλεσμα ένα νέο πίνακα C διάστασης 3×4:

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ 3 & \times & \boxed{2 \qquad\quad 2} & \times & 4 \end{array}$$

Αντίθετα, ο πολλαπλασιασμός $B\,A$ δεν γίνεται:

$$\begin{array}{ccccc} & B & & A & \\ 2 & \times & \boxed{4 \quad \neq \quad 3} & \times & 2 \end{array}$$

Πράξεις Πινάκων

Ας υπολογίσουμε τώρα, στοιχείο προς στοιχείο, τον πίνακα $C = AB$.

Για το στοιχείο c_{11} χρησιμοποιούμε την 1η γραμμή του A και την 1η στήλη του B:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C_{3\times 4} = \begin{pmatrix} c_{11} = 5 \times (-4) + (-2) \times 5 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -30 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Αντίστοιχα, για το στοιχείο c_{12} χρησιμοποιούμε την 1η γραμμή του A και την 2η στήλη του B:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -30 & c_{12} = 5\times 3 + (-2)\times(-1) & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -30 & 17 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε:

Στοιχείο c_{13} (1η γραμμή του A με 3η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{14} (1η γραμμή του A με 4η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{21} (2η γραμμή του A με 1η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Στοιχείο c_{22} (2η γραμμή του A με 2η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{23} (2η γραμμή του A με 3η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{24} (2η γραμμή του A με 4η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{31} (3η γραμμή του A με 1η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ -8 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Πράξεις Πινάκων

Στοιχείο c_{32} (3η γραμμή του A με 2η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ -8 & 17 & * & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{33} (3η γραμμή του A με 3η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ -8 & 17 & -7 & * \end{pmatrix}$$

Στοιχείο c_{34} (3η γραμμή του A με 4η στήλη του B)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ -8 & 17 & -7 & 27 \end{pmatrix}$$

Άρα τελικά:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 17 & -5 & 29 \\ 19 & -6 & 1 & -11 \\ -8 & 17 & -7 & 27 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Πράξεις Πινάκων

Προσοχή!

Πράξη **διαίρεσης** ανάμεσα σε δύο πίνακες A και B δεν ορίζεται όπως στους αριθμούς. Η αντίστοιχη πράξη στους πίνακες ορίζεται διαμέσου του πολλαπλασιασμού του πίνακα A με τον αντίστροφο πίνακα του B,

$$A\,B^{-1},$$

εφόσον ο πίνακας B αντιστρέφεται. Ασφαλώς, για τον παραπάνω πολλαπλασιασμό ισχύουν όλοι οι περιορισμοί του πολλαπλασιασμού πινάκων ως προς τις διαστάσεις.

Πράξεις Πινάκων

Ιδιότητες Πράξεων Πινάκων

Έστω πίνακες $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και αριθμοί $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$.

1. $A + B = B + A$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
3. $A + \mathcal{O}_{m\times n} = A$
4. $A - A = \mathcal{O}_{m\times n}$
5. $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$
7. $(k_1\, k_2)A = k_1(k_2 A)$
8. $1\,A = A, \quad 0\,A = \mathcal{O}_{m\times n}$

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες του ορισμού των αντίστοιχων πράξεων πινάκων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό) που ανάγονται σε πράξεις αριθμών.

Πράξεις Πινάκων

Προτάσεις

1. Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ισχύει ότι:
$$A = \left(A^T\right)^T, \quad A = (A^*)^*.$$
2. Αν $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, τότε ισχύει ότι:
$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (A+B)^* = A^* + B^*.$$
3. Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$ τότε:
$$(k\,A)^T = k\,A^T, \quad (k\,A)^* = \overline{k}\,A^*.$$
4. Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός τότε ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός ενώ ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.
5. Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Προσπαθήστε να αποδείξετε τις παραπάνω προτάσεις.

Πράξεις Πινάκων

Ιδιότητες Πράξεων Πινάκων

Για πίνακες A, B, C, $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, καταλλήλων διαστάσεων ώστε να γίνονται οι πράξεις, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1. $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)
2. $A\,(B + C) = A\,B + A\,C$ (Επιμεριστική με την πρόσθεση)
3. $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$ (Επιμεριστική με την πρόσθεση)
4. $\lambda\,(A\,B) = (\lambda\,A)\,B = A\,(\lambda\,B), \quad \forall\lambda \in \mathbb{F}$
5. $\mathcal{I}\,A = A\,\mathcal{I} = A, \quad \mathcal{O}\,A = \mathcal{O}, \quad A\,\mathcal{O} = \mathcal{O}$
6. $(A\,B)^T = B^T\,A^T, \quad (A\,B)^* = B^*\,A^*$

Οι παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς των αντίστοιχων πράξεων.

Πράξεις Πινάκων

Ορισμός

k-**Δύναμη** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, $k \in \mathbb{N}$, καλείται ο πίνακας,

$$A^k = \underbrace{A\,A \cdots A}_{k \text{ φορές}}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{I}$$

$$A^3 = A\,A\,A = (A\,A)\,A = A^2\,A = \mathcal{I}\,A = A$$

$$A^4 = A\,A\,A\,A = A^3\,A = A\,A = A^2 = \mathcal{I}$$

$$\cdots (\text{επαγωγικά}) \cdots$$

$$A^k = \begin{cases} A, & k \text{ περιττός}, \\ \mathcal{I}, & k \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Πράξεις Πινάκων

Ιδιότητες Δύναμης Πινάκα

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, και $\lambda \in \mathbb{F}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $A^m A^n = A^{m+n}$
2. $(A^m)^n = A^{mn}$
3. $(\lambda A)^n = \lambda^n A^n$
4. Αν $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, τότε $A^m = \mathrm{diag}\left(a_{11}^m, a_{22}^m, \ldots, a_{nn}^m\right)$

Οι παραπάνω ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της δύναμης πίνακα.

Προσοχή!

Η σχέση, $(A B)^k = A^k B^k$, **δεν ισχύει** γενικά στους πίνακες, παρά μόνο αν είναι μεταξύ τους **αντιμεταθετικοί**, δηλαδή αν,

$$A B = B A.$$

Αντίστροφος Πίνακας

Ορισμός

Αντίστροφος (inverse) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται ένας πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει ότι,

$$A\,B = B\,A = \mathcal{I}.$$

Αν υπάρχει, ο αντίστροφος του πίνακα A συμβολίζεται χαρακτηριστικά ως A^{-1} και ο A καλείται **αντιστρέψιμος**.

Προσοχή!

Ο αντίστροφος ενός πίνακα A **δεν υπάρχει πάντα**, αλλά αν υπάρχει είναι μοναδικός.

Αντίστροφος Πίνακας

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Θα βρούμε, αν υπάρχει, τον A^{-1}. Έστω ότι ο αντίστροφος υπάρχει και είναι ο $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε πρέπει να ισχύει ότι:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = \mathcal{I}.$$

Έχουμε:

$$A\,A^{-1} = \mathcal{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -x+z & -y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow z = 1,\ w = 0,\ -x+z = 0,\ -y+w = 1 \Leftrightarrow z = 1,\ w = 0,\ x = 1,\ y = -1 \qquad (1)$$

$$A^{-1}\,A = \mathcal{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -y & x+y \\ -w & z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -y = 1,\ x+y = 0,\ -w = 0,\ z+w = 1 \Leftrightarrow z = 1,\ w = 0,\ x = 1,\ y = -1 \qquad (2)$$

Από τις Σχέσεις (1) και (2), ο αντίστροφος υπάρχει και είναι ο $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ∎

Αν δεν συμφωνούσαν οι Σχέσεις (1) και (2), δεν θα υπήρχε ο αντίστροφος.

Αντίστροφος Πίνακας

Ιδιότητες Αντίστροφου Πινάκα

1. Αν A αντιστρέψιμος, τότε,

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \qquad \left(A^{-1}\right)^{*} = \left(A^{*}\right)^{-1}.$$

2. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε,

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.$$

3. Αν A αντιστρέψιμος και $k \in \mathbb{F}$, $k \neq 0$, τότε,

$$(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k}\,A^{-1}.$$

Αντίστροφος Πίνακας

Εφαρμογή στην Κρυπτογραφία

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα για να κρυπτογραφήσουμε ένα μήνυμα και στην συνέχεια τον αντίστροφό του για να το αποκρυπτογραφήσουμε.

$M \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$: ο πίνακας που περιέχει το μήνυμα.
$A \in M_m(\mathbb{F})$: ο αντιστρέψιμος πίνακας τον οποίο συμφωνήσαμε με τον παραλήπτη να χρησιμοποιήσουμε για (απο-)κρυπτογράφηση.

Παράγουμε το κρυπτογραφημένο μήνυμα M':

$$M' = A\,M,$$

όπου προφανώς $M' \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Στην συνέχεια μεταδίδουμε το M' μέσω του (μη-ασφαλούς) καναλιού επικοινωνίας. Ο παραλήπτης (ο οποίος γνωρίζει εκ των προτέρων τον A) αποκρυπτογραφεί το M' ως εξής:

$$A^{-1}\,M' = A^{-1}\,(A\,M) = \left(A^{-1}\,A\right)\,M = \mathcal{I}\,M = M.$$

Οποιοσδήποτε υποκλέψει το μήνυμα M' κατά την μετάδοσή του από το κανάλι επικοινωνίας και δεν γνωρίζει τον πίνακα A, δεν είναι σε θέση να αποκρυπτογραφήσει το μήνυμα.

Αντίστροφος Πίνακας

Έστω ότι έχουμε αντιστοιχίσει τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και το κενό (συμβολίζεται me *) σε αριθμούς:

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	*
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Επίσης, έχουμε συμφωνήσει με τον παραλήπτη ότι το μήνυμα θα κωδικοποιείται σε έναν πίνακα M όπου οι χαρακτήρες εμφανίζονται ανά 3 σε στήλες. Έτσι, το μήνυμα:

Ξ Ε Κ Ι Ν Η Σ Τ Ε * Σ Υ Ν Ο Μ Ι Λ Ι Ε Σ

αναπαρίσταται σε πίνακα ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \Xi & \mathrm{I} & \Sigma & * & \mathrm{N} & \mathrm{I} & \mathrm{E} \\ \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \Sigma & \mathrm{O} & \Lambda & \Sigma \\ \mathrm{K} & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \Upsilon & \mathrm{M} & \mathrm{I} & * \end{pmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας

Αντικαθιστώντας τα γράμματα με τους αντίστοιχους αριθμούς από τον πίνακα, λαμβάνουμε το μήνυμα σε μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \Xi & \mathrm{I} & \Sigma & * & \mathrm{N} & \mathrm{I} & \mathrm{E} \\ \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \Sigma & \mathrm{O} & \Lambda & \Sigma \\ \mathrm{K} & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \Upsilon & \mathrm{M} & \mathrm{I} & * \end{pmatrix} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 18 & 25 & 13 & 9 & 5 \\ 5 & 13 & 19 & 18 & 15 & 11 & 18 \\ 10 & 7 & 5 & 20 & 12 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

Έστω ότι ο αντιστρέψιμος πίνακας που συμφωνήσαμε με τον παραλήπτη να χρησιμοποιήσουμε για (απο-)κρυπτογράφηση είναι ο ακόλουθος:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Το μήνυμα κρυπτογραφείται ως εξής:

$$M' = A\,M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 9 & 18 & 25 & 13 & 9 & 5 \\ 5 & 13 & 19 & 18 & 15 & 11 & 18 \\ 10 & 7 & 5 & 20 & 12 & 9 & 25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -97 & -94 & -131 & -209 & -132 & -96 & -169 \\ 15 & 20 & 24 & 38 & 27 & 20 & 43 \\ 111 & 103 & 149 & 234 & 145 & 105 & 174 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας

Το κρυπτογραφημένο μήνυμα M' αποστέλλεται στον παραλήπτη. Αυτός αρχικά υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα A (που του είναι γνωστός):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια το M' αποκρυπτογραφείται ως εξής:

$$M = A^{-1}M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -97 & -94 & -131 & -209 & -132 & -96 & -169 \\ 15 & 20 & 24 & 38 & 27 & 20 & 43 \\ 111 & 103 & 149 & 234 & 145 & 105 & 174 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 9 & 18 & 25 & 13 & 9 & 5 \\ 5 & 13 & 19 & 18 & 15 & 11 & 18 \\ 10 & 7 & 5 & 20 & 12 & 9 & 25 \end{pmatrix}$$

και αντικαθιστώντας τους αριθμούς με τα αντίστοιχα γράμματα έχουμε το αρχικό μήνυμα:

$$\begin{pmatrix} \Xi & \mathrm{I} & \Sigma & * & \mathrm{N} & \mathrm{I} & \mathrm{E} \\ \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{T} & \Sigma & \mathrm{O} & \Lambda & \Sigma \\ \mathrm{K} & \mathrm{H} & \mathrm{E} & \Upsilon & \mathrm{M} & \mathrm{I} & * \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$