ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2025-26
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ
ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

- ☑ Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα - Ιδιόχωροι
- ☑ Πολυώνυμα Πινάκων
- ☑ Διαγωνοποίηση

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, $x \neq \mathcal{O}$, καλείται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) με ιδιοτιμή (eigenvalue) $\lambda \in \mathbb{F}$ για τον τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν ισχύει ότι:

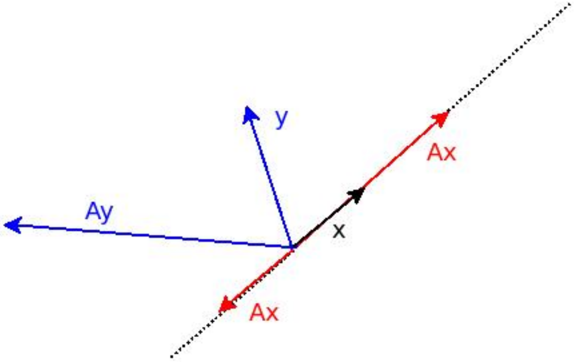
$$Ax = \lambda x.$$

Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές καλούνται **χαρακτηριστικά μεγέθη** ή **χαρακτηριστικά ποσά** του πίνακα.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Ο πίνακας A επιδρά ως μετασχηματισμός στα διανύσματα.



Τα ιδιοδιανύσματα του A είναι εκείνα τα διανύσματα που δεν αλλάζουν φορέα παρά μόνο μήκος ή/και φορά. Η ιδιοτιμή καθορίζει πόσο θα αλλάξει το μήκος και η φορά (αν είναι αρνητική). Π.χ. Το y δεν είναι ιδιοδιάνυσμα, ενώ το x που παραμένει στον φορέα του, είναι.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και τα διανύσματα,

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε:

$$A\,y = \lambda\,y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει η παραπάνω σχέση. Άρα το y δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A.

Αντίθετα, για το x έχουμε:

$$A\,x = \lambda\,x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $\lambda = 3$. Άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\lambda = 3$. ■

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Υπολογισμός ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ - ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Σχηματίζουμε το τετραγωνικό σύστημα:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = \mathcal{O} \Leftrightarrow (A - \lambda \mathcal{I})x = \mathcal{O}.$$

   Το σύστημα αυτό είναι τετραγωνικό $n \times n$, ομογενές, με παράμετρο λ.

2. Υπολογίζουμε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν,

$$\det(A - \lambda \mathcal{I}) = 0,$$

   και αυτές οι τιμές του λ είναι οι ιδιοτιμές.

3. Για καθεμιά από τις παραπάνω τιμές του λ, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες λύσεις x που είναι τα ιδιοδιανύσματα. Προφανώς αυτές οι λύσεις είναι άπειρες για κάθε λ, δηλαδή θα έχουμε οικογένειες ιδιοδιανυσμάτων.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Θα υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ στα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$.

Αρχικά σχηματίζουμε το σύστημα,

$$(A - \lambda \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Αν ο πίνακας ορίζεται στο $\mathbb{R}$, τότε,

$$\lambda^2 + 1 > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Αφού το σύστημα έχει μη-μηδενική ορίζουσα, θα έχει μοναδική λύση.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Αφού το σύστημα είναι και ομογενές, η μοναδική λύση θα είναι η τετριμμένη,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Όμως, εκ του ορισμού, τα ιδιοδιανύσματα δεν μπορεί να είναι μηδενικά, άρα ο πίνακας A δεν έχει ιδιοδιανύσματα στο $\mathbb{R}$.

Αντίθετα, στο σύνολο $\mathbb{C}$ έχουμε:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\,\mathrm{i}.$$

Για αυτά τα λ το σύστημα έχει μη-μηδενικές λύσεις, άρα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Ελέγχουμε καθεμιά ανεξάρτητα για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

(α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = \mathrm{i}$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} -\mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & \mathrm{i}\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow -\mathrm{i}\,x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \mathrm{i}\,x_1$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή η οικογένεια ιδιοδιανύσματων, για την ιδιοτιμή λ_1 είναι,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{i}\,x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

(β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & \mathrm{i}\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\mathrm{i}\,x_1$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή η οικογένεια ιδιοδιανύσματων, για την ιδιοτιμή λ_2 είναι,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\mathrm{i}\,x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}. \quad \blacksquare$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Ορισμός

Ιδιοχώρος (eigenspace) μιας ιδιοτιμής λ_i ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται το σύνολο,

$$V(\lambda_i) = \{x \in M_{n\times 1}(\mathbb{F});\ (A - \lambda_i \mathcal{I})\, x = \mathcal{O}\}\,,$$

δηλαδή ο δ.χ. των ιδιοδιανύσματων της λ_i. Το σύνολο αυτό είναι μη-τετριμμένος υπόχωρος του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$. Επιπλέον, η διάστασή του είναι,

$$\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i \mathcal{I})$$

και καλείται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i. Για αυτή ισχύει ότι,

$$1 \leqslant \dim V(\lambda_i) \leqslant \nu_i,$$

όπου ν_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ορισμός

Ιδιοτιμή μιας απεικόνισης $f : V \to V$ ενός δ.χ. V με $\dim V = n$, καλείται μια τιμή $\lambda \in \mathbb{F}$ αν υπάρχει διάνυσμα $x \in V$, $x \neq \mathcal{O}$, τέτοιο ώστε, $f(x) = \lambda x$. Σε αυτή την περίπτωση το x καλείται **ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης** f. Αν A ο πίνακας αναπαράστασης της f, οπότε και $f(x) = Ax$, οι ιδιοτιμές της f είναι οι ιδιοτιμές του A.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Προτάσεις

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, οι ιδιοτιμές του A, τότε,
$$\det A = \lambda_1 \, \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n \, b_0,$$
όπου b_0 ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
2. Ο A αντιστρέφεται *ανν* δεν έχει μηδενικη ιδιοτιμή ή ισοδύναμα ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μη-μηδενικός.
3. Οι πίνακες A και $A^\top$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές.
4. Αν λ και x μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε τα λ^k και x είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον A^k, $k \in \mathbb{N}$, ενώ τα λ^{-1} και x είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον A^{-1}.
5. Αν $B = P^{-1} \, A \, P$ είναι όμοιος πίνακας με τον A και λ και x μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε τα λ και $P^{-1} \, x$ είναι τα αντίστοιχα μεγέθη για τον B.
6. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα.
7. Αν A ερμιτιανός πίνακας, δηλαδή $A = A^*$, τότε έχει πραγματικές ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.

Χαρακτηριστικά μεγέθη

- Να βρεθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα, επιλύοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det(A - \lambda \mathcal{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda) - 1\right] - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Για $\lambda_1 = 1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1 \mathcal{I})x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{array} \right.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_1 = 1$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\,(1, 0, -1)^\top;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left((1, 0, -1)^\top \right).$$

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_1 = \left\{ (1, 0, -1)^\top \right\}, \qquad \dim V(\lambda_1) = 1 \leqslant v_1 = 1.$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, πρέπει να ισχύει ότι, $\dim V(\lambda_1) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I})$. Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (\text{γραμμοπράξεις}) \cdots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (\text{κλιμακωτή μορφή})$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα $\mathrm{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = 2$ και από το θεώρημα έχουμε,

$$\dim V(\lambda_1) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = 3 - 2 = 1,$$

που επαληθεύει αυτό που βρήκαμε παραπάνω.

(β) Για $\lambda_2 = -1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_2 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2\,x_3 \end{array} \right.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_2 = -1$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ -2\,x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1,-2,1)^\top ;\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left((1,-2,1)^\top \right).$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_2) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_2 = \left\{(1,-2,1)^\top\right\}, \qquad \dim V(\lambda_2) = 1 \leqslant v_2 = 1.$$

Να κάνετε επαλήθευση του θεωρήματος, $\dim V(\lambda_2) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_2 \mathcal{I})$, όπως παραπάνω.

(γ) Για $\lambda_3 = 2$ έχουμε:

$$(A - \lambda_3 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0-\lambda_3 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & = & x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Χαρακτηριστικά μεγέθη

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_3 = 2$ είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι:

$$V(\lambda_3) = \left\{ x\,(1,1,1)^\top ;\ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left((1,1,1)^\top \right).$$

Προφανώς μια βάση του ιδιοχώρου και η διάστασή του (γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_3) είναι, αντίστοιχα, οι εξής,

$$B_3 = \left\{ (1,1,1)^\top \right\}, \qquad \dim V(\lambda_3) = 1 \leqslant \nu_3 = 1.$$

Να κάνετε επαλήθευση του θεωρήματος, $\dim V(\lambda_3) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_3 \mathcal{I})$, όπως παραπάνω. ■

Πολυώνυμα πινάκων

Ορισμός

Πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται ένας πίνακας της μορφής,

$$\rho(A) = a_k\, A^k + a_{k-1}\, A^{k-1} + \cdots + a_1\, A + a_0\, \mathcal{I}, \quad a_i \in \mathbb{F}, \forall\, i.$$

Ο πίνακας A είναι **ρίζα** του πολυωνύμου αν $\rho(A) = \mathcal{O}$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει ότι $\chi_A(A) = \mathcal{O}$, δηλαδή κάθε τετραγωνικός πίνακας αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του.

Ορισμός

Ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(A)$ ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται το πολυώνυμο του A με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με 1.
2. $m_A(A) = \mathcal{O}$
3. Το $m_A(A)$ είναι το πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό από όλα τα πολυώνυμα που πληρούν τις ιδιότητες (1) και (2).

Πολυώνυμα πινάκων

Προτάσεις

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ είναι μοναδικό.
2. Αν $\chi_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε,
$$\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda)\,\pi(\lambda),$$
όπου $\pi(\lambda)$ κάποιο πολυώνυμο. Δηλαδή, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο διαιρείται ακριβώς με το ελάχιστο πολυώνυμο.
3. Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ έχει ακριβώς τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$. Οι ρίζες αυτές είναι οι ιδιοτιμές του A.
4. Αν $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s}$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο είναι,
$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{k_s},$$
με $1 \leqslant k_i \leqslant \nu_i$, $i = 1, \ldots, s$. Προφανώς αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε $m_A(\lambda) = \chi_A(\lambda)$.

Πολυώνυμα πινάκων

Υπολογισμός ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

Για να βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}.$$
2. Ελέγχουμε ένα προς ένα όλα τα πολυώνυμα,
$$m(A) = (A - \lambda_1 \mathcal{I})^{k_1} (A - \lambda_2 \mathcal{I})^{k_2} \cdots (A - \lambda_i \mathcal{I})^{k_i},$$
με $1 \leqslant k_i \leqslant \nu_i$, ξεκινώντας από τον μικρότερο βαθμό προς τον μεγαλύτερο.
3. Το πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό για το οποίο ισχύει η ιδιότητα,
$$m(A) = \mathcal{O},$$
είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A (και είναι μοναδικό).

Πολυώνυμα πινάκων

- Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι ένα εκ των ακόλουθων πολυωνύμων:

$$m_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2), \qquad m_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2),$$

$$m_3(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2, \qquad m_4(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2.$$

Ξεκινούμε να τα ελέγχουμε με την παραπάνω σειρά (από τον χαμηλότερο προς τον μεγαλύτερο βαθμό). Έχουμε:

$$m_1(A) = (A - \mathcal{I})(A - 2\mathcal{I}) = \cdots (\text{πράξεις πινάκων}) \cdots = \mathcal{O}.$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. ■

Διαγωνοποίηση

Ορισμός

Διαγωνοποιήσιμος καλείται ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε,

$$D = P^{-1} A P,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας. Με άλλα λόγια, ένας πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Πρόταση

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται *ανν* έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επιπλέον, ο διαγώνιος πίνακας $D = P^{-1} A P$ θα έχει στην κύρια διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A και ο πίνακας P θα έχει σε στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που συνιστούν βάσεις των ιδιοχώρων.

Διαγωνοποίηση

- Θα ελέγξουμε αν διαγωνοποιείται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Αρχικά, υπολογίζουμε με τον γνωστό τρόπο τις ιδιοτιμές του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathcal{I} - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Αφου ο πίνακας έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές, θα έχει υποχρεωτικά και 2 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και άρα διαγωνοποείται σύμφωνα με την γνωστή πρόταση.

(α) Για την $\lambda_1 = 3$ υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο ο ιδιοχώρος,

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\ (1, 3/2)^\top ;\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_1 = \left\{ (1, 3/2)^\top \right\}$.

Διαγωνοποίηση

(β) Για την $\lambda_2 = 2$ υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο ο ιδιοχώρος,

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1,1)^\top \,;\; x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_2 = \left\{ (1,1)^\top \right\}$.

Σύμφωνα με την πρόταση, ο διαγώνιος πίνακας και ο πίνακας ομοιότητας θα δίνονται ως εξής:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, εύκολα επαληθεύεται ότι ο P είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

και,

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Διαγωνοποίηση

Προτάσεις

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. Αν ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές τότε διαγωνοποιείται (το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει).
2. Αν ο A διαγωνοποιείται και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, τότε η k-δύναμή του δίνεται ως:

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

   όπου P ο πίνακας ομοιότητας.
3. Ο πίνακας A διαγωνοποιείται *ανν* το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων,

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k),$$

   όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.
4. Το ίχνος του A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$, δίνεται ως,

$$\mathrm{tr}(A) = (\nu_1 \lambda_1)(\nu_2 \lambda_2) \cdots (\nu_k \lambda_k).$$

Διαγωνοποίηση

- Θα υπολογίσουμε την δύναμη A^5 για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Αρχικά, υπολογίζουμε με τον γνωστό τρόπο τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathcal{I} - A) = \cdots = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 5),$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και $\lambda_2 = 5$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1). Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι υπολογίζονται κατά τα γνωστά:

(α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ έχουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda_1 \mathcal{I}) = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - 2\,x_2.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - 2\,x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Διαγωνοποίηση

Συνεπώς ο ιδιοχώρος της λ_1 είναι ο ακόλουθος:

$$V(\lambda_1) = \left\{ x\,(1,0,-1)^\top + y\,(0,1,-2)^\top ;\; x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

με βάση την ακόλουθη (να αποδείξετε ότι είναι βάση),

$$B_1 = \left\{ (1,0,-1)^\top, (0,1,-2)^\top \right\}.$$

και διάσταση $\dim V(\lambda_1) = 2$.

(β) Όμοια, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε το σύστημα:

$$(A - \lambda_2 \mathcal{I})\, x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς ο ιδιοχώρος της λ_2 είναι ο ακόλουθος:

$$V(\lambda_2) = \left\{ x\,(1,1,1)^\top ;\; x \in \mathbb{R} \right\},$$

με προφανή βάση την $B_2 = \left\{ (1,1,1)^\top \right\}$ και διάσταση $\dim V(\lambda_2) = 1$.

Διαγωνοποίηση

Αφού ο πίνακας έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποιείται με,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

και εύκολα υπολογίζουμε (με οποιαδήποτε μέθοδο θέλουμε) ότι,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, κατά τα γνωστά, θα έχουμε:

$$A^5 = P\,D^5\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 5^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} 782 & 1562 & 781 \\ 781 & 1563 & 781 \\ 781 & 1562 & 782 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ανάλυση Κύριων Συνιστωσών (PCA)

Τι είναι;

Μια πολύ γνωστή τεχνική μη επιβλεπόμενης μείωσης διαστάσεων που κατασκευάζει σχετικά χαρακτηριστικά/μεταβλητές μέσω γραμμικών (γραμμική PCA) ή μη γραμμικών (πυρήνα PCA) συνδυασμών των αρχικών μεταβλητών (χαρακτηριστικά).

- Η κατασκευή σχετικών χαρακτηριστικών επιτυγχάνεται με τον γραμμικό μετασχηματισμό των συσχετισμένων μεταβλητών σε μικρότερο αριθμό μη συσχετισμένων μεταβλητών.
- Αυτό γίνεται με την προβολή (dot product) των αρχικών δεδομένων στον μειωμένο χώρο PCA χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα συνδιακύμανσης/συσχέτισης, γνωστά και ως κύριες συνιστώσες (PCs).
- Τα προβαλλόμενα δεδομένα που προκύπτουν είναι ουσιαστικά γραμμικοί συνδυασμοί των αρχικών δεδομένων που καταγράφουν το μεγαλύτερο μέρος της διακύμανσης στα δεδομένα.

Principal Component Analysis (PCA)

- Στόχος: μείωση διάστασης διατηρώντας τη μέγιστη δυνατή πληροφορία.
- Υπολογίζουμε τον πίνακα συνδιακύμανσης των δεδομένων.

$$C = \frac{1}{m} X^\top X$$

- Ιδιοδιανύσματα: κατευθύνσεις μέγιστης διακύμανσης (κύριες συνιστώσες).
- Ιδιοτιμές: ποσότητα διακύμανσης που εξηγεί κάθε συνιστώσα.

Συνοπτικά

Ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός των δεδομένων σε μια σειρά από μη συσχετισμένα δεδομένα που ζουν στον μειωμένο χώρο PCA, έτσι ώστε το πρώτο συστατικό να εξηγεί τη μεγαλύτερη διακύμανση στα δεδομένα, ενώ κάθε επόμενο συστατικό να εξηγεί λιγότερη.

PCA illustration

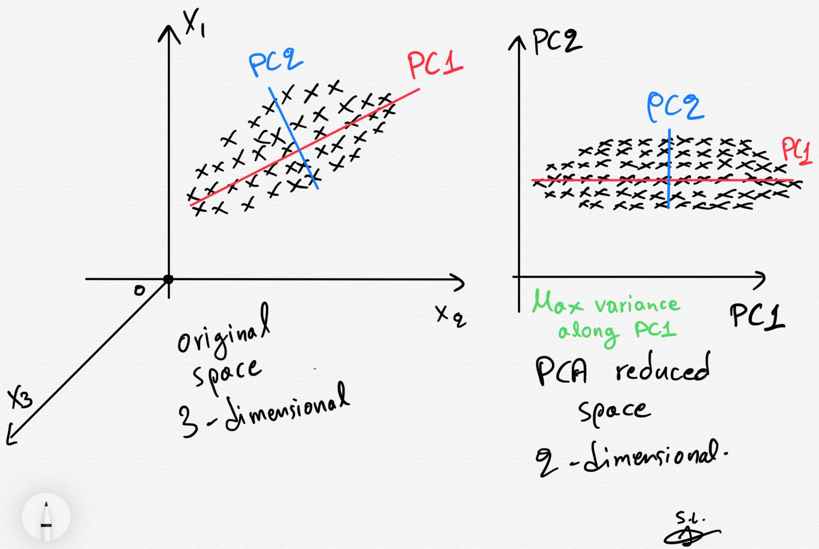


Figure: Example of PCA.

Πότε/Γιατί να χρησιμοποιήσετε PCA

- Η τεχνική PCA είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επεξεργασία δεδομένων όπου υπάρχει πολυσυγγραμμικότητα μεταξύ των χαρακτηριστικών/μεταβλητών.
- Η PCA μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν οι διαστάσεις των χαρακτηριστικών εισόδου είναι υψηλές (π.χ. πολλές μεταβλητές).
- Η PCA μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την αποθορυβοποίηση και τη συμπίεση δεδομένων.

PageRank

Η Google ήθελε να μετρήσει πόσο «σημαντική» είναι κάθε σελίδα στο Web.

- Μια σελίδα είναι σημαντική αν την δείχνουν πολλές άλλες σελίδες.
- Αλλά δεν έχουν όλες οι σελίδες το ίδιο βάρος.
- Μια σελίδα που έχει υψηλή σημασία και σε δείχνει, σου δίνει μεγαλύτερο βάρος.

Αυτό είναι ένα είδος κυκλικού ορισμού, και ακριβώς εδώ οι ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα λύνουν το πρόβλημα!

PageRank

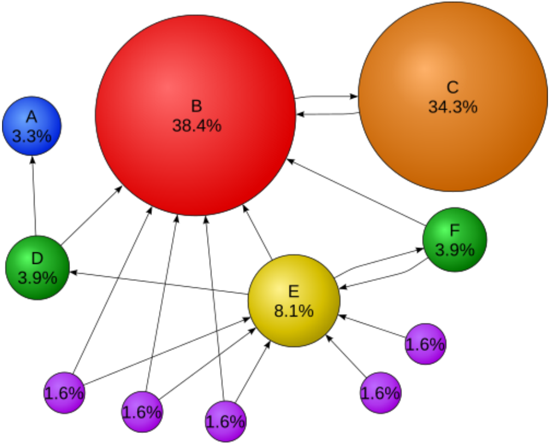


Figure: Example of PageRank values visualised (node sizes proportional to rank).

Τι σημαίνει πρακτικά

- Το PageRank εκφράζει πόσο συχνά θα επισκέπτεται κανείς μια σελίδα μετά από άπειρα clicks.
- Το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1 δίνει την μοναδική μακροπρόθεσμη κατανομή.
- Όσο πιο μεγάλη τιμή έχει μια σελίδα στο r, τόσο πιο σημαντική.
- Αυτό έκανε την Google ριζικά καλύτερη από τις παλιές μηχανές αναζήτησης.