

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2026-27
(ΜΤΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- ✓ Εισαγωγή - Βασικοί Ορισμοί
- ✓ Πράξεις Διανυσμάτων
- ✓ Γραμμικοί συνδυασμοί
- ✓ Ανισότητες
- ✓ Tensors

Διάνυσμα

- **Διάνυσμα:** Δομή που περιέχει μια διατεταγμένη λίστα αριθμών πεπερασμένου μήκους/διάστασης.
- Οι αριθμοί ενός διανύσματος καλούνται στοιχεία (ή συντελεστές) του.
 - ▶ **διατεταγμένη:** η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα στοιχεία έχει σημασία.
 - ▶ **διάσταση:** ο αριθμός (πλήθος) των στοιχείων που περιέχει.
 - ▶ **πεπερασμένου:** δεν μπορούμε να έχουμε άπειρους αριθμούς. Η διάσταση θα πρέπει να είναι πεπερασμένη (π.χ. 2, 7, 99, 1024, 10000, ...).

Σε περίπτωση διάστασης «1», πρόκειται για απλό πραγματικό αριθμό (βαθμωτό μέγεθος). Παράδειγμα: ένα διάνυσμα με δύο στοιχεία αναπαριστά π.χ. τις συντεταγμένες ενός σημείου στο 2Δ-επίπεδο.

Αναπαράσταση διανύσματος

- Φυσική: Βέλος στο χώρο.
- Πληροφορική: Λίστα αριθμών, π.χ. $(0, 1, 3.5)$.
- Έχει σημασία η σειρά εμφάνισης: $(0, 3.5, 1) \neq (0, 1, 3.5)$.
- Μαθηματικά: $\mathbf{v}$ ή $\vec{v}$.

Διάνυσμα στήλη και γραμμή

- Διάνυσμα στήλη: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$, εναλλακτικά: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.
- Διάνυσμα γραμμή: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$.
- $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Διανυσματικές πράξεις Σημείο κλειδί της γραμμικής άλγεβρας:

- Μπορούμε να τα προσθέσουμε, να τα πολλαπλασιάσουμε με έναν αριθμό καθώς και να τα συνδυάσουμε μεταξύ τους.

Πρόσθεση διανυσμάτων

- Πρόσθεση: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$.
- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 + 4 \\ 3 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό c

- Πολλαπλασιασμός: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $c \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \end{pmatrix}$.
- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

- Συνδυάζουμε τις δύο προηγούμενες πράξεις (πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό) για να δημιουργήσουμε ένα γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ γραμμικός συνδυασμός: } c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{w}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

$$c \cdot \mathbf{v} + d \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \cdot w_1 \\ d \cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot v_1 + d \cdot w_1 \\ c \cdot v_2 + d \cdot w_2 \end{pmatrix}$$

όπου $c, d \in \mathbb{R}$.

- Παράδειγμα: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$

$$2 \cdot \mathbf{v} + (-3) \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Διανύσματα

- Ένα διάνυσμα με δύο στοιχεία (2 διαστάσεων) αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο επίπεδο. Τι συμβαίνει στις 3 διαστάσεις;

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων στις τρεις διαστάσεις (3Δ)

- Συνδυάζουμε τις δύο προηγούμενες πράξεις (πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό) για να δημιουργήσουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 8 - 6 \\ 1 + 12 + 2 \\ 2 + 4 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

- Για ένα 3Δ διάνυσμα $\mathbf{u}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι πολλαπλάσια του $\mathbf{u}$, δηλαδή $c \cdot \mathbf{u}$ (π.χ. $-3 \cdot \mathbf{u}$, $1.2 \cdot \mathbf{u}$, $0 \cdot \mathbf{u}$).
- Για δύο 3Δ διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$ (π.χ. $1 \cdot \mathbf{u} + 3 \cdot \mathbf{v}$).
- Για τρία 3Δ διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, οι γραμμικοί συνδυασμοί είναι $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$ (π.χ. $2 \cdot \mathbf{u} - 3 \cdot \mathbf{v} + 0.5 \cdot \mathbf{w}$).
- Από έναν συνδυασμό σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς (c, d, e) ?

Ερωτήσεις:

- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{u}$;
- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$;
- Τι σχηματίζουν στον 3Δ χώρο όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί $c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} + e \cdot \mathbf{w}$;

Απαντήσεις:

- Μια γραμμή η οποία περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$.
- Ένα επίπεδο που περιέχει το σημείο $(0, 0, 0)$.
- Ολόκληρο τον 3Δ χώρο $\mathbb{R}^3$.

Τυπική Κατάσταση: Γραμμή, Επίπεδο, Χώρος. Όχι όμως πάντα. Τι συμβαίνει όταν $\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v}$; (Το 3ο διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων 2).

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

- Ισχύει: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (η σειρά εμφάνισης των διανυσμάτων δεν παίζει ρόλο).

Παράδειγμα

- Αν $\mathbf{u} = (1, 2)$ και $\mathbf{v} = (3, 1)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$
- Αν $\mathbf{u} = (4, 2)$ και $\mathbf{v} = (-1, 2)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 0$
- Αν $\mathbf{u} = (1, 0)$ και $\mathbf{v} = (0, 1)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$
- Διανύσματα με εσωτερικό γινόμενο $\ll 0 \gg$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Γενίκευση στις N διαστάσεις

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, υπολογίζεται ως:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_N \cdot v_N = \sum_{i=1}^N u_i \cdot v_i$$

Μήκος Διανύσματος

- Το μήκος ή μέτρο ενός διανύσματος είναι η τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος με τον εαυτό του:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_N^2}$$

- Παράδειγμα: Αν $\mathbf{u} = (1, 2)$, το μήκος του $\mathbf{u}$ είναι:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

- Αν $\mathbf{u} = (a, b)$, το μήκος του $\mathbf{u}$ είναι:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$|\mathbf{u}|^2 = a^2 + b^2$$

Γωνία διανυσμάτων - Μοναδιαίο διάνυσμα

- Διάνυσμα μήκους «1»: $|\mathbf{u}| = 1$.
- Από ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε το μοναδιαίο διάνυσμά του ως εξής: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ (διαιρούμε κάθε στοιχείο του διανύσματος με το μήκος του διανύσματος).
- Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι συγγραμμικά.

Παράδειγμα:

- Τα τυπικά μοναδιαία διανύσματα συμβολίζονται με τα γράμματα $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$.
- Στις δύο διαστάσεις έχουμε: $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$.
- Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x είναι το:

$$\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta).$$

- Ισχύει: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Κάθετα διανύσματα

- Εάν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, είναι μηδέν (0) τότε τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.
- Γιατί; Θυμηθείτε ότι:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta.$$

- Εάν η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι θ , τότε:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos \theta.$$

- Επομένως, αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, τότε $\cos \theta = 0$, δηλαδή η γωνία είναι 90° .

Συμπέρασμα:

- Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ έχει θετικό πρόσημο, τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μικρότερη των 90° .
- Εάν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ έχει αρνητικό πρόσημο, τότε η γωνία μεταξύ τους είναι μεγαλύτερη των 90° .
- Ισχύει: $\cos \theta > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\cos \theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Διατύπωση

Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

- Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ανισότητα Τριγώνου

Διατύπωση

Για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

- Γεωμετρική ερμηνεία: Το άθροισμα των μηκών δύο πλευρών τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μήκος της τρίτης πλευράς.

Εφαρμογές των Ανισοτήτων Διανυσμάτων

- Προβλήματα βελτιστοποίησης
- Ανάλυση δεδομένων και μηχανική μάθηση
- Επεξεργασία σήματος
- Κβαντική μηχανική

Παράδειγμα 1: Επαλήθευση της Cauchy-Schwarz

- Έστω $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{v} = (4, -5, 6)$
- Υπολογίστε $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, και $\|\mathbf{v}\|$
- Επαληθεύστε ότι $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$

Λύση του Παραδείγματος 1

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12$
- $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
- $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77}$
- $\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| = \sqrt{14 \times 77} = \sqrt{1078} \approx 32.83$
- $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |12| = 12$
- Επειδή $12 \leq 32.83$, η ανισότητα ισχύει.

Τι είναι ένα tensor (τανυστής);

- Ένα tensor είναι μια πολυδιάστατη γενίκευση διανυσμάτων και μητρώων.
- Μπορεί να αναπαραστήσει μεγέθη όπως διανύσματα, πίνακες, και περισσότερο πολύπλοκες μαθηματικές δομές.
- Ένα tensor βαθμού 0 είναι ένας αριθμός (ή βαθμωτό).
- Ένα tensor βαθμού 1 είναι ένα διάνυσμα.
- Ένα tensor βαθμού 2 είναι ένας πίνακας.

Tensors Βαθμού 0, 1, 2

- Tensor Βαθμού 0 (scalar):

$$T^0 = 5$$

- Tensor Βαθμού 1 (Διάνυσμα):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Tensor Βαθμού 2 (Πίνακας):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tensor Υψηλότερου Βαθμού

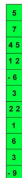
- Τα tensors μπορούν να έχουν περισσότερες διαστάσεις και να αναπαρασταθούν ως πολυδιάστατοι πίνακες.
- Ένα tensor βαθμού 3 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κύβος δεδομένων:

$$T^3 = \{T_{ijk}\} \quad \text{με } i, j, k \text{ να είναι οι δείκτες}$$

- Tensors υψηλότερων βαθμών χρησιμοποιούνται συχνά στη φυσική (π.χ. στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας).

Tensor visualization

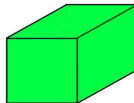
1D TENSOR /
VECTOR



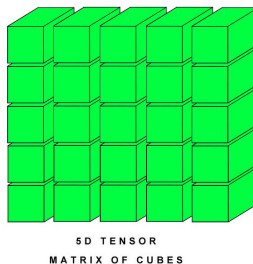
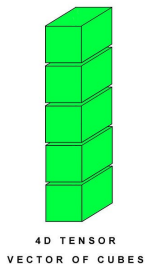
2D TENSOR /
MATRIX

-9	4	2	5	7
3	0	12	8	61
1	23	-6	45	2
22	3	-1	72	6

3D TENSOR /
CUBE



-9	4	2	5	7
3	0	12	8	61
1	23	-6	45	2
22	3	-1	72	6



Πράξεις με Tensors

- **Addition and Subtraction:** Tensors of the same rank can be added or subtracted element-wise.
- **Tensor Product:** The product of two tensors A_{ij} and B_{kl} results in a new tensor $C_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$.
- **Contraction:** Reducing the rank of a tensor by summing over one or more pairs of indices.

$$C_i = T_{ij}A^j \quad (1)$$

Tensors στη Φυσική

- Τα tensors είναι απαραίτητα στην περιγραφή φυσικών φαινομένων, όπως η Θεωρία της Σχετικότητας.
- Στη Γενική Σχετικότητα του Einstein, το tensor καμπυλότητας Riemann είναι ένα tensor βαθμού 4 που περιγράφει την καμπυλότητα του χωροχρόνου.

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

- **Continuum Mechanics:** Stress and strain in materials are described using tensors.
- **Computer Vision and Deep Learning:** Tensors are used to represent multi-dimensional data.

Python Code Example

Below is an example in Python using PyTorch for basic tensor operations.

```
import torch

# Creating Tensors
# A scalar (rank-0 tensor)
scalar = torch.tensor(5)
print(f'Scalar tensor: {scalar}')

# A vector (rank-1 tensor)
vector = torch.tensor([1, 2, 3])
print(f'Vector tensor: {vector}')

# A matrix (rank-2 tensor)
matrix = torch.tensor([[1, 2], [3, 4]])
print(f'Matrix tensor:\n{matrix}')

# A rank-3 tensor
tensor_3d = torch.tensor([[[1, 2], [3, 4]], [[5, 6], [7, 8]]])
print(f'Rank-3 tensor:\n{tensor_3d}')
```

Tensor operations

```
# Element-wise addition
```

```
tensor_sum = vector + torch.tensor([3, 2, 1])  
print(f"Element-wise addition result: {tensor_sum}")
```

```
# Matrix multiplication
```

```
mat1 = torch.tensor([[1, 2], [3, 4]])  
mat2 = torch.tensor([[5, 6], [7, 8]])  
mat_mul = torch.matmul(mat1, mat2)  
print(f"Matrix multiplication result:\n{mat_mul}")
```

```
# Tensor reshaping
```

```
reshaped_tensor = tensor_3d.view(2, 4)  
print(f"Reshaped tensor:\n{reshaped_tensor}")
```

```
# Automatic differentiation
```

```
x = torch.tensor(3.0, requires_grad=True)  
y = x**2  
y.backward()  
print(f"The derivative of  $y = x^2$  at  $x = 3$  is: {x.grad}")
```

Explanation of Key Concepts

- **Creating Tensors:** Tensors are multi-dimensional arrays in PyTorch. We create scalar, vector, matrix, and rank-3 tensors in the example.
- **Tensor Operations:** We perform element-wise addition and matrix multiplication.
- **Reshaping Tensors:** The `view` function reshapes tensors.
- **Automatic Differentiation:** PyTorch supports automatic differentiation using the `requires_grad=True` option, and the gradient is computed using the `backward()` method.