ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Χειμερινό εξάμηνο 2025-26
(ΜΥΥ104-ΠΛΥ104)

Κωνσταντίνος Σκιάνης
Επίκουρος Καθηγητής

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

- ☑ Ανάπτυγμα Laplace
- ☑ Ορίζουσες και Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί
- ☑ Ύπαρξη και Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα
- ☑ Μέθοδος Προσαρτημένου Πίνακα

Ορίζουσες

Ορισμός

Ορίζουσα (determinant) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται μια απεικόνιση,

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F},$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν r_i είναι η i-γραμμή του πίνακα A και p, q, δύο πίνακες - γραμμές με $r_i = \lambda\, p + \mu\, q$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, τότε:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ r_i \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ \lambda\, p + \mu\, q \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ p \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{i-1} \\ q \\ r_{i+1} \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

2. Αν $r_i = r_j$ για κάποιο $i \neq j$, τότε $\det A = 0$.
3. $\det \mathcal{I}_n = 1$.

Εναλλακτικός συμβολισμός: $\det A$, $\det(A)$, $|A|$

Ορίζουσες

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ LAPLACE

Το ανάπτυγμα Laplace αποτελεί έναν απλό, αναδρομικό τρόπο υπολογισμού της ορίζουσας πινάκων:

Για έναν 2×2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, η ορίζουσα υπολογίζεται από την απλή σχέση:

$$\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Για έναν 3×3 πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ο υπολογισμός της ορίζουσας ανάγεται σε υπολογισμό 2×2 υπο-οριζουσών.

Πιο συγκεκριμένα, αρχικά αναθέτουμε ένα πρόσημο σε κάθε στοιχείο του πίνακα, ξεκινώντας με το $+$ στην θέση (1,1) και πηγαίνοντας εναλλάξ έτσι ώστε δύο γειτονικά στοιχεία οριζόντια ή κάθετα να έχουν πάντα αντίθετα πρόσημα:

$$\det A = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{a_{11}} & \overset{(-)}{a_{12}} & \overset{(+)}{a_{13}} \\ \overset{(-)}{a_{21}} & \overset{(+)}{a_{22}} & \overset{(-)}{a_{23}} \\ \overset{(+)}{a_{31}} & \overset{(-)}{a_{32}} & \overset{(+)}{a_{33}} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-) & (+) & (-) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ (+) & (-) & (+) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Στην συνέχεια, επιλέγεται μια γραμμή ή στήλη του πίνακα. Η ορίζουσα θα δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της επιλεχθείσας γραμμής ή στήλης, επί τα αντίστοιχα πρόσημα, επί την αντίστοιχη υπο-ορίζουσα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον πίνακα την γραμμή και την στήλη στην οποία ανήκει το αντίστοιχο στοιχείο.

Για παράδειγμα, αν επιλεγεί η 1η γραμμή, τότε:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι η αντίστοιχη υπο-ορίζουσα για το στοιχείο a_{ij} είναι αυτή που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα.

Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} {\color{red}(+)} & {\color{red}(-)} & {\color{red}(+)} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ {\color{red}(-)} & {\color{red}(+)} & {\color{red}(-)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ {\color{red}(+)} & {\color{red}(-)} & {\color{red}(+)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Αντίστοιχα, αν επιλεγεί η 2η γραμμή, τότε:

$$\det A = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 3η γραμμή, τότε:

$$\det A = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} (+) & (-) & (+) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (-) & (+) & (-) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ (+) & (-) & (+) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 1η στήλη, τότε:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 2η στήλη, τότε:

$$\det A = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Αν επιλεγεί η 3η στήλη, τότε:

$$\det A = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ακολούθως, υπολογίζονται οι 2×2 ορίζουσες και προκύπτει η τιμή της $\det A$. Το ίδιο γενικεύεται σε πίνακες διάστασης $n \times n$, κάνοντας διαδοχικά αναπτύγματα στις ορίζουσες μέχρι να κατέβουμε σε διάσταση 2×2.

Ορίζουσες

Ορισμός

Το **ανάπτυγμα Laplace** ως προς την i-γραμμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, δίνεται από την σχέση:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, \det A_{ij},$$

όπου A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακας που προκύπτει από τον A αν αφαιρέσουμε την i-γραμμή και την j-στήλη.

Προσοχή!

Η ορίζουσα υπολογίζεται για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και η τιμή της **είναι μοναδική**. Συνεπώς, όποια γραμμή ή στήλη και να επιλέξετε στο ανάπτυγμα Laplace, θα πρέπει να λάβετε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα!
Προφανώς μας συμφέρει να επιλέγουμε πάντα την γραμμή ή στήλη με τα **περισσότερα μηδενικά** ώστε να υπολογίζουμε λιγότερες υπο-ορίζουσες.

Ορίζουσες

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Υπολογίζουμε την ορίζουσα:

Αρχικά αναθέτουμε πρόσημα: $\det A = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{-2} & \overset{(-)}{3} & \overset{(+)}{-1} \\ \overset{(-)}{4} & \overset{(+)}{-1} & \overset{(-)}{0} \\ \overset{(+)}{1} & \overset{(-)}{5} & \overset{(+)}{0} \end{vmatrix}$.

Στην συνέχεια επιλέγουμε γραμμή ή στήλη ως προς την οποία θα αναπτύξουμε. Προφανώς είναι προτιμότερο να αναπτύξουμε ως προς την 3η στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)\det A_{13} - 0\det A_{23} + 0\det A_{33} \\ &= (-1)\det A_{13} \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\left(4 \times 5 - (-1) \times 1\right) \\ &= -21 \end{aligned}$$

Ορίζουσες

$$\det A = \begin{vmatrix} \color{red}{(+)} & \color{red}{(-)} & \color{red}{(+)} \\ -2 & 3 & -1 \\ \color{red}{(-)} & \color{red}{(+)} & \color{red}{(-)} \\ 4 & -1 & 0 \\ \color{red}{(+)} & \color{red}{(-)} & \color{red}{(+)} \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Αν είχαμε επιλέξει την 1η γραμμή:

$$\begin{aligned} \det A &= (-2)\det A_{11} - 3\det A_{12} + (-1)\det A_{13} \\ &= (-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(0-0) - 3(0-0) + (-1)(20+1) \\ &= -21 \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα ως προς τις υπόλοιπες γραμμές και στήλες.

Ορίζουσες

Ιδιότητες Ορίζουσας

1. Η ορίζουσα τριγωνικού ή διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του: $\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$.
2. Αν ένας πίνακας έχει δύο όμοιες γραμμές, $r_i = r_j$, ή ανάλογες μεταξύ τους, $r_i = k\, r_j$, ή μια μηδενική γραμμή, τότε έχει $\det A = 0$. Όμοια και για τις στήλες.
3. $\det(\lambda\, A) = \lambda^n \det A$
4. **Μετασχηματισμός Τύπου I**: Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα A με έναν αριθμό λ, τότε ο νέος πίνακας A' που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = \lambda \det A.$$
5. **Μετασχηματισμός Τύπου II**: Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα A, μια άλλη γραμμή του πολλαπλασιασμένη με έναν αριθμό, τότε ο νέος πίνακας A' που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = \det A.$$
6. **Μετασχηματισμός Τύπου III**: Αν εναλλάξουμε την θέση δύο γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα A, ο νέος πίνακας A' που προκύπτει έχει ορίζουσα,
$$\det A' = -\det A.$$

Ορίζουσες

- Με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Καταρχήν παρατηρούμε ότι στην 1η γραμμή και στήλη έχουμε παντού το στοιχείο a. Άρα, μπορούμε να σχηματίσουμε μηδενικά αφαιρώντας την 1η γραμμή από όλες τις υπόλοιπες. Αυτό είναι Μετασχηματισμός Τύπου ΙΙ και δεν αλλάζει την ορίζουσα:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες

Παίρνουμε ανάπτυγμα Laplace ως προς την 1η στήλη:

$$\det A = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \begin{array}{c} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} = a \begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & c-b & d-b \end{vmatrix}$$

Παίρνουμε πάλι ανάπτυγμα Laplace ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{aligned} \det A &= a\,(b-a) \begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} \\ &= a\,(b-a)\left[(c-b)\,(d-b) - (c-b)^2\right] \\ &= a\,(b-a)\,(c-b)\,[(d-b)-(c-b)] \\ &= a\,(b-a)\,(c-b)\,(d-c) \end{aligned}$$

Ορίζουσες

Προτάσεις

Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $\det A^\top = \det A, \qquad \det \overline{A} = \overline{\det A}, \qquad \det A^* = \overline{\det A}$
2. $\det(A\,B) = \det A \det B$
3. $\det\left(A^k\right) = (\det A)^k$

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Αντίστροφος Πίνακας

Σημασία του αντίστροφου πίνακα

Η ορίζουσα ενός πίνακα μας δίνει πληροφορίες σχετικά με την αντιστρεψιμότητά του. Όμως γιατί είναι σημαντική η αντιστροφή?

Στις περισσότερες εφαρμογές του φυσικού κόσμου όπου απαιτούνται υπολογισμοί, εμφανίζονται γραμμικά συστήματα των οποίων αναζητούμε την λύση.

Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από ένα πλήθος γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους. Η γενική μορφή τους είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

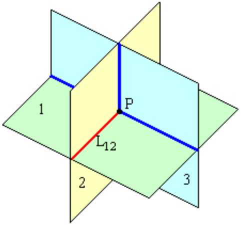
όπου x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι οι άγνωστοι, a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, είναι γνωστοί συντελεστές των αγνώστων και b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι σταθεροί όροι.

Η επίλυση του συστήματος είναι η διδαδικασία εύρεσης κατάλληλων τιμών των αγνώστων x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις του συστήματος, ταυτόχρονα.

Σε μεγάλα συστήματα, δεν είναι εφικτή η αναλυτική επίλυση με απλή αντικατάσταση.

Αντίστροφος Πίνακας

Για παράδειγμα, η εύρεση της τομής των 3 επιπέδων που ορίζονται από τις σχέσεις,



$$\begin{aligned} \text{επίπεδο } 1: &\quad 2x-3y+4z-1=0 \\ \text{επίπεδο } 2: &\quad x-y-z+1=0 \\ \text{επίπεδο } 3: &\quad -x+2y-z+2=0 \end{aligned}$$

και τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο, ανάγεται στην επίλυση του συστήματος,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -2 \end{array}$$

Το σύστημα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα σε μορφή πινάκων ως εξής,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b} \iff AX = b$$

Αντίστροφος Πίνακας

Επόμένως, αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}, έχουμε,

$$\begin{aligned} AX = b &\iff A^{-1}(AX) = A^{-1}b \\ &\iff \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}b \\ &\iff \mathcal{I}X = A^{-1}b \\ &\iff X = A^{-1}b \end{aligned}$$

Δηλαδή, η λύση X του συστήματος δίνεται από το γινόμενο των πινάκων A^{-1} και b.

Επομένως, η επίλυση του γραμμικού συστήματος ανάγεται στην εύρεση του αντίστροφου του πίνακα A των συντελεστών των αγνώστων. $\blacksquare$

Αντίστροφος Πίνακας

Ορισμός

Αλγεβρικά συμπληρώματα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλούνται οι ποσότητες,

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου A_{ij} είναι ο υποπίνακας που προκύπτει από τον A αν αφαιρεθεί η i-γραμμή και η j-στήλη του.

Αντίστροφος Πίνακας

- Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det A_{11} = -7, \qquad c_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = -7$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det A_{12} = 3, \qquad c_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{12} = -3$$

Ομοιοτρόπως λαμβάνουμε,

$$c_{13} = 2,\ c_{21} = -2,\ c_{22} = -2,\ c_{23} = 0,\ c_{31} = -3,\ c_{32} = -3,\ c_{33} = 2. \quad \blacksquare$$

Αντίστροφος Πίνακας

Ορισμός

Προσαρτημένος (adjugate) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται ο πίνακας $\mathrm{adj}(A) \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος στην (i, j)-θέση του περιέχει το αλγεβρικό συμπλήρωμα c_{ji}. Δηλαδή,

$$\mathrm{adj}(A) = C^\top,$$

όπου,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του A.

Αντίστροφος Πίνακας

- Για τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

του οποίου έχουμε ήδη υπολογίσει τα αλγεβρικά συμπληρώματα, έχουμε,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

και άρα ο προσαρτημένος του είναι,

$$\mathrm{adj}(A) = C^\top = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Αντίστροφος Πίνακας

Πρόταση

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν,

$$\det A \neq 0,$$

και τότε ο αντίστροφος πίνακας δίνεται από την σχέση,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A),$$

όπου $\operatorname{adj}(A)$ ο προσαρτημένος πίνακας του A.

Αντίστροφος Πίνακας

- Για τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας αντιστρέφεται. Επίσης βρήκαμε τον προσαρτημένο του,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, ο αντίστροφος του A είναι ο πίνακας,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 & 1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 3/4 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$